Pierderi recente în lumea matematicienilor

Miron Oprea

În vara aceasta, lumea matematicienilor a suferit două pierderi. În partea a doua a lunii mai, în urma unui accident de mașină, cea mai sclipitoare minte omenească, matematicianul John Forbes Nash și soția acestuia, Alicia. Ei se întorceau în America după ce, pe 19 mai a.c, primiseră din mâinile Regelui Norvegiei Harold al V-lea, premiul Abel. Nash, împreună cu matematicianul canadian Louis Nirenberg, au primit premiul Abel (care se acordă anual) pentru contribuția lor decisivă la studiul *ecuațiilor cu derivate parțiale neliniare și a aplicațiilor lor la analiza geometrică.* Premiul a constat în 6.000.000 coroane (aproximativ 700.000 €).

Iată alăturat scena în care regele Harold înmânează medalia Abel lui Nash (cel în picioare) și lui Nirenberg (cel în cărucior).

Se știe că, în 1994, Nash a primit premiul Nobel pentru contribuțiile sale la fundamentarea matematică a *„teoriei jocurilor strategice*” și a aplicațiilor sale în dezvoltarea economiei.

Iată alăturat poza lui John și Alicia Nash la ceremonia Nobel dela Stockholm, în decembrie 1994. Deasemenea, redăm alături poza în care John Nash se înclină în fața audienței, după primirea medaliei Nobel dela regele Suediei.

Viața tumultoasă a lui John Nash a făcut obiectul unei cărți scrise de Sylvia Nasar: *„O minte sclipitoare*” (tradusă și în limba română), precum și obiectul unui film, *A beatiful mind* (*Un om de excepție*).

John Forbes Nash s-a născut la 13 iunie 1928 în Virginia (S.U.A.), a studiat la Princeton și a susținut, în 1950, teza sa de doctorat privitoare la teoria jocurilor, teză în care el introduce celebrele echilibre Nash care-i vor aduce premiul Nobel în Economie, în 1994. Matematicianul rus *Mikail Gromov*, alt medaliat cu premiul Abel, va declara: *„Nash a realizat în Geometrie mult mai mult decât a realizat în Economie.”* John Nash și Louis Nirenberg n-au colaborat niciodată, dar ei s-au întâlnit în anii 1956-1957 la New York, la Institutul Richard Courant. Ambii sunt celebri pentru teoremele lor de prelungire privind varietățile riemaniene.

Prin moartea lui Nash, comunitatea internațională a matematicienilor a pierdut pe cea mai ilustră și profundă minte omenească. La aflarea morții lui Nash, comunitatea matematicienilor a fost și rămâne profund îndurerată. *Dumnezeu să-l odihnească!*

O altă pierdere a suferit-o comunitatea profesorilor de matematică din țara noastră la aflarea morții ilustrului profesor *Alexandru Popescu-Zorica*, la începutul lunii iulie anul curent. Profesorul Al. Popescu-Zorica a fost un strălucit metodist și un profund cunoscător al evoluției matematice în general, cu o profundă cultură generală. Conferințele sale convingeau, mai ales, că erau presărate cu o serie de amănunte savuroase. Născut în București, în 1920, el a avut privilegiul de a fi în contact cu marii noștri matematicieni ce au ilustrat învățământul matematic dela toate nivelele. În anii 1939-1940, tatăl său a fost prefectul Bucureștilor, motiv pentru care, în anii 50 ai secolului trecut, el a fost privat de libertate peste doi ani.

Revenit la catedră, la finele anilor 70, el este încadrat ca lector la *Institutul pentru Perfecționarea Cadrelor Didactice* (IPCD) unde s-a remarcat ca un strălucit metodist. A scris o serie de articole în revistele de matematică din țara noastră, printre care, am avut bucuria ca unele din ele să fie publicate și în *Axioma-supliment matematic*. Ultima întâlnire cu profesorul Zorica am avut-o pe 31 ianuarie a.c, la *Festivalul de Poezie și Satiră „Romeo și Julieta la Mizil"*. Era nelipsit dela *Conferința anuală de Analiză neliniară și Matematici aplicate*, organizată la Universitatea Valahia din Târgoviște.

Îi vom simți lipsa vervei cu care își delecta auditoriul.

Dumnezeu să-l odihnească!

Asupra unei probleme de O.I.M.

Marin Ionescu, Gheorghe Molea, Pitești

În iulie 2000 la O.I.M. a fost propusă următoarea inegalitate:

„Fie a, b, c numere reale strict pozitive astfel încât abc=1

Să se arate că $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1$ "

În condiţiile din enunţ, inegalitatea se poate scrie sub forma

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq abc$$

În cele ce urmează, vom da o generalizare acestei inegalităţi:

<u>PROPOZIŢIE</u>

Fie $n\in N, n\geq 3$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale strict pozitive astfel încât $a_1\, a_2 \ldots a_n = 1$

Atunci există inegalitatea:

$$\left(a_1-1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_2a_3\ldots a_{n-1}}\right)\left(a_2-1+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ \ldots+\frac{1}{a_3a_4\ldots a_{n-1}a_n}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(a_k-1+\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}}+\ldots+\frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_n a_1\ldots a_{k-2}}\right)\ldots\left(a_n-1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1a_2}+\ldots+\frac{1}{a_1a_2\ldots a_{n-2}}\right)\leq$$

$$\leq\left(a_1+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_2a_3\ldots a_{n-1}}\right)\left(a_2+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_3a_4\ldots a_n}\right)\ldots$$

...... $\left(a_k+\frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}}+\dots+\frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}\dots a_n a_1\dots a_{k-2}}\right)\dots\left(a_n+\frac{1}{a_1a_2}+\dots+\frac{1}{a_1a_2\dots a_{n-2}}\right)$

unde în termenul stâng fiecare factor al produsului este o sumă de n termeni, iar fiecare factor al produsului din membrul drept este o sumă de *n-2* termeni.

<u>Demonstraţie</u>:

Deoarece $a_1a_2\dots a_n=1$, omogenizăm cu ajutorul substituţiei $a_1=\frac{x_1}{x_2}, a_2=\frac{x_2}{x_3}, \dots a_n=\frac{x_n}{x_1}$, unde $x_1, x_2, \dots, x_n>0$.

Inegalitatea devine:

$$(x_1-x_2+x_3+\dots+x_n)(x_2-x_3+x_4+\dots+x_n+x_1)\dots(x_k-x_{k+1}+\dots+x_n+x_1+x_2+\dots+x_{k-1})\dots$$
$$\dots(x_n-x_1+x_2+\dots+x_{n-1})\le(x_1+x_4+x_5+\dots+x_n)(x_1+x_2+x_5+x_6+\dots+x_n)\dots$$
$$\dots(x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+3}+\dots+x_n)\dots(x_3+x_4+\dots+x_n)$$

(1)

În continuare demonstrăm inegalitatea (1).

Facem următoarele notaţii:

$$y_i=x_1+x_2+\dots+x_{i-1}-x_i+x_{i+1}+\dots+x_n, (\forall)i=\overline{1,n}$$

Au loc relaţiile

$$\frac{y_1+y_2}{2}=x_3+x_4+\dots+x_n>0, \frac{y_2+y_3}{2}=x_1+x_4+\dots+x_n>0,$$
$$\frac{y_{n-1}+y_n}{2}=x_1+x_2+\dots+x_{n-2}>0, \frac{y_n+y_1}{2}=x_2+x_3+\dots+x_{n-1}>0$$

Folosind comutativitatea înmulţirii numerelor reale, inegalitatea se mai poate scrie:

$$2^n y_1y_2\dots y_n\le(y_1+y_2)(y_2+y_3)\dots(y_{n-1}+y_n)(y_n+y_1), \qquad (2)$$

Dacă toate numerele $y_1, y_2, \dots, y_n$ sunt mai mari sau egale cu zero, atunci din $y_i+y_{i+1}\ge 2\sqrt{y_iy_{i+1}}$, $(\forall)i=\overline{1,n}$, $y_{n+1}=y_1$, prin înmulţire rezultă (2)

Dacă există *i* $\in\{1,2,\dots,n\}$ astfel încât $y_i<0$, acesta este unic.

Într-adevăr, dacă presupunem că există $r,s\in\{1,2,\dots,n\}$, $r<s$, astfel încât $y_r<0, y_s<0$,

adică: $x_1+x_2+\dots+x_{r-1}-x_r+x_{r+1}+\dots+x_n=y_r<0$

$x_1+x_2+\dots+x_{s-1}-x_s+x_{s+1}+\dots+x_n=y_s<0$

Obţinem:

$$x_1+x_2+\dots+x_{r-1}+x_{r+1}+\dots+x_{s-1}+x_{s+1}+\dots+x_n=\frac{y_r+y_s}{2}<0,$$ absurd!

În cazul în care unul dintre numerele y_i, $i\in\{1,2,\dots,n\}$ este negativ, produsul $y_1y_2\dots y_n$ este mai mic sau egal cu zero, iar $(y_1+y_2)(y_2+y_3)\dots(y_{n-1}+y_n)(y_n+y_1)>0$ şi inegalitatea (2) este demonstrată.

Propoziţia este acum complet demonstrată.

Pentru $n=3$, notând $a_1=a, a_2=b, a_3=c$, obţinem problema dată în anul 2000 la O.I.M.

<u>Bibliografie:</u>

[1] Mircea Becheanu şi Bogdan Enescu, *A 41-a Olimpiadă Internaţională de Matematică* , G.M. nr. 10/2000

Câte ceva despre hazard

Miron Oprea

De aproape patru secole, de când *Calculul probabilităților* a intrat în preocupările oamenilor, *hazardul* a devenit temă de analiză și cercetare pentru matematicieni, fizicieni, filozofi, sociologi etc. etc. În acest context, au apărut o serie de lucrări dedicate hazardului care îi analizează multiplele fațete sub care se prezintă. În 1970, la celebra editură franceză Bordas, a apărut lucrarea „*Autopsia hazardului*” (ocupă locul [2] în bibliografia noastră) semnată de un matematician și un filozof. Această lucrare a rămas punct de referință în literatura dedicată hazardului.

De obicei, *hazardul* este considerat sinonim cu *întâmplare*, dar ele nu au aceeași sferă ca noțiune. În diverse contexte, hazardul este considerat soartă, destin, fatalitate etc, așa cum este analizat în [9] din bibliografia noastră.

Există hazard ? Știința a refuzat multe secole de a-l lua în considerație, considerând *Calculul probabilităților* drept o *proteză matematică* a ignoranței omului, mai ales, în cazul *jocurilor de noroc* și a *jocurilor strategice*.

Marii filozofi și matematiceni din *Antichitatea greacă* nu au dezvoltat o teorie a probabilităților căci ei nu cunoșteau jocurile de hazard, de-abia în *Renașterea italiană* au apărut primele considerații matematice despre probabiltăți. În această epocă, marele algebrist *Jerome Cardan* (1501-1576) publică un tratat în care el utilizează analiza combinatorie elementară pentru a determina, ceeace mai numim astăzi, „*probabilitățile de câștig la jocurile de zaruri*”. Lucrarea lui Cardan a constituit un punct de plecare în teoria probabilităților pentru *Blaise Pascal*(1623-1662) și *Pierre Fermat*(1601-1665). în schimbul de scrisori dintre ei referitor la *problema părților* (vezi [3]), s-a născut ideea că hazardul poate fi abordat direct prin știință. În acest mod, Pascal dezvoltă o nouă disciplină științifică, pe care el a numit-o „*geometria hazardului”*, termenul de „geometrie”, fiind în epocă sinonim cu „matematică”. Pascal realizează, astfel, o veritabilă revoluție intelectuală acceptând *hazardul* ca obiect de investigație spre a-i descoperi „legile”. Revoluția inițiată de Pascal a întâmpinat o serie de piedici (vezi [8]) – interpretări eronate ale probabilității. Prima eroare pe care o făceau cei ce foloseau probabilitățile consta în faptul că ei credeau că probabiltățile permit să dirjăm și să stăpânim hazardul, deci, că era posibil să se optimizeze șansele la jocurile de hazard (loto, cazinou etc.). A fi în măsură să calculezi probabilitățile într-un joc de hazard nu permite de a modifica aceste probabilități în profitul nostru. De exemplu, a fi în măsură să prevezi o eclipsă de Soare sau de Lună nu înseamnă că e posibil de a dirija mersul Soarelui și al Lunii. O a doua eroare consta în a te îndoi de valoarea științifică a probabilităților pe motiv că ele se bazează pe noțiunea de hazard, foarte vag și rău definită. Această obiecție nu este fără valoare, dar nu trebuie să fie rău dirijată. Până la începutul sec. XX, este adevărat că teoria probabilităților era expusă la diverse critici: numeroase paradoxuri aparente, care proveneau din faptul că lipsea o anumită claritate în definirea unor noțiuni, astfel că unii nu considerau probabilitățile ca parte componentă legitimă a matematicilor. Și astăzi, încă, se observă o oarecare distanță a unor matematicieni față de Calculul probabilităților, dar, această tendință a devenit marginală. În 2006, medalia Fields a fost atribuită, pentru prima dată, pentru lucrări în teoria probabilităților, matematicianului francez *Wendelin Werner* dela Universtitatea d’Orsay. Acest lucru a ilustrat faptul că Teoria probabilităților nu este periferică în matematici.

Pentru ca hazardul să devină obiect de știință, era necesar să fie eliberat de orice aspect mistic și acest lucru l-a realizat ilustrul matematician rus *Andrei Kolmogorov* (1903-1987). Kolmogorov, în lucrările lui din anul 1933, a axiomatizat *Teoria probabilităților*,

dându-i același statut ca și cel al geometriei, algebrei etc. În acest mod, Teoria probabilităților devine o știință abstractă, având ca noțiuni de bază *evenimentele* și *probabilitățile* lor. Axiomele puse la baza teoriei nu sunt artificiale, ele au la bază activitatea practică a oamenilor.

Iată, pe scurt, construcția axiomatică a lui Kolmogorov pentru câmpurile de probabilități (*finit* și, respectiv, *infinit*).

I. *Câmp de evenimente*

Fie E o mulțime și K o familie de părți ale sale.

Def. 1: K este corp dacă:

1) oricare ar fi $A \in K$, $CA \in K$;
2) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in K$, dacă $A_i \in K$ cu $i = \overline{1,n}$

Cuplul (E, K) se numește *câmp de evenimente* și are o serie de proprietăți.

Def. 2: K se numește σ - corp, dacă:

1) oricare ar fi $A \in K$, $CA \in K$;
2) $UA_i \in K$, dacă $A_i \in K$ pentru orice $i \in I$ unde I este o mulțime numărabilă de indici.

II. Câmp de probabilitate

Fie K un σ - corp de părți ale unei mulțimi E.

Def. 3: Funcția P definită pe K cu valori reale este o probabilitate dacă:

1) $P(A) \geq 0$ oricare ar fi $A \in K$;
2) $P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, dacă $A_i \in K$, $i \in I$ unde I este cel mult numărabilă $A_i \cap A_j = \phi$ când $i \neq j$.

Tripletul (E, K, P) se numește *câmp de probabilitate.* Câmpul de probabilitate are o serie de proprietăți printre care $P(\phi) = 0; P(CA) = 1 - P(A)$, $P(B - A) = P(B) - P(A)$ dacă $A \subseteq B$ etc.

Pentru aprofundarea și dezvoltarea celor de mai sus, trimitem cititorul la [5] din bibliografia noastră.

Bibliografie

[1] Marcel Boll, *Certitudinile hazardului,* Ed. Științifică, București,1978;
[2] J. L. Boursin, P. Caussat, *Autopsie du hasard*, Ed. Bordas, Paris, 1970;
[3] Keith Devlin, *Partida neterminată,* Ed. Humanitas, București, 2010;
[4] E. Fischbein, *Hazard și probabilitate în gândirea copilului,* Ed. Didactică, București, 1974;
[5] Gh. Mihoc, N. Micu, *Elemente de teoria probabilităților și statistică,* Ed. Didactică, București, 1966;

[6] Octav Onicescu, *Pe drumurile vieții,* Ed. Științifică, București, 1981;
[7] Alfréd Rény, *Dialog despre calculul probabilităților,* Ed. Enciclopedică, București, 1973;
[8] Benoît Rittaud, *La part du hasard,* în Tangente Hors – serie 38, Paris;
[9] Warren Weaver, *Doamna Șansă,* Ed. Științifică, București, 1969.

Provocare

Ioan Dăncilă, București

În numărul 53 al Suplimentului Axioma, a apărut articolul *Duzina „spartă”: numărul 13.* Suntem în măsură să vă provocăm cu următoarele întrebări:

1. Știți care sunt cele 13 culturi după care sunt clasificate cifrele ?

2. Știți care sunt cele 13 axe de simetrie ale cubului ?

3. Știți ce proprietate, legată de numărul 13, are suma primelor 13 numere prime ?

4. Știți ce legătură există între singurul triunghi dreptunghic cu laturile exprimate în numere naturale, iar perimetrul și aria sunt exprimate prin același număr cu numărul 13 ?

5. Știți ce legătură cu numărul 13 are ecuația diofantică $z^2 = x^3 - y^3$?

6. Știți că cel mai mare număr, cu toate cifrele diferite și divizibil cu fiecare dintre ele, se divide și cu 13 ?

Benjamin Franklin la {MATEMATICA}$\bigcap${FIZICA}

Prof. Grațiela Calcan

Benjamin Franklin reprezintă una din personalitățile de căpetenie ale formării poporului american. Acest om de geniu a luptat toată viața pentru desăvârșirea personalității sale, în scopul folosirii ei ca un instrument solid în slujba identității naționale.

Născut la 17 ianuarie 1706 la Boston, Benjamin Franklin este al 17-lea copil al unei familii de coloniști englezi, sosiți în America la 1682, din comitatul Harthhaupthonskire, din nord-estul Angliei. De mic dovedește o inteligență deosebită, remarcându-se la școală „pentru scris și socotit”. La vârsta de 10 ani întrerupe școala din cauza lipsurilor materiale ale familiei. La 12 ani devine ucenic tipograf, prilej cu care vine în contact cu foarte multe cărți și citește asiduu. În această perioadă începe pregătirea sa pentru viață, viață care îi va oferi cea mai înaltă treaptă pe care o poate urca un om în secolul său: 24 de Universități și Societăți Științifice din lume i-au acordat titlul de „Doctor Honoris Causa” sau membru de onoare în timpul vieții. Citind memoriile sale, publicate în remarcabila lucrare „*Autobiografie*”, apărută în Anglia, la 1808 și, apoi, în Franța, la 1818 și, după aceea, în toată lumea, ești impresionat de acest geniu universal comparat cu Leonardo da Vinci și Leibniz. Foarte rar, un singur om întrunește atât de multe calități morale, de inteligență, patriotism și voință într-un tot perfect, cum s-a întâmplat la B. Franklin. El este un autodidact care ajutat de o voință extraordinară și de o inteligență deosebită și, în același timp, de o mare dragoste de muncă și de oameni, reușește să devină un remarcabil om de știință, scriitor, inventator, om de afaceri, diplomat și om de stat cunoscut în toată lumea.

Studiază și învață 5 limbi (franceza, italiana, spaniola, germana și latina), elaborează studii de economie, teoria valorii bazată pe muncă și un studiu privind creșterea populației. În aceste studii folosește calcule matematice foarte precise, modul de înmulțire a populației, apreciind că, într-un secol, în America se va depăși populația Angliei. El afirma că populația se dublează la fiecare 25 de ani, natalitatea fiind mai mare la populația săracă. Teoriile lui au fost confirmate de istorie. Cercetările lui Franklin se realizează în multe alte domenii: medicină, zoologie, filosofie, muzică, chimie, geologie, matematică, culminând cu o serie de invenții și fiind considerat creatorul Teoriei electricității moderne.

În paralel, are o activitate socială și politică de mare importanță, fiind creatorul Bibliotecii publice din Philadelphia, a primei Academii Americane (1749), este parlamentar și are contribuții deosebite în realizarea „Declarației de independență”, contribuind esențial la scrierea Convenției americane, articole care se păstrează și în prezent în Constituția S.U.A.

Te întrebi, citind memoriile sale, cum a putut să realizeze atât de multe lucruri și atât de bine și gasești o explicație tot în „Autobiografie”: studiind algebra morală pe care o practica. După cum singur mărturisește, și-a propus proiectul îndrăzneț de a ajunge la perfecțiunea morală, dornic să trăiască fără a face greșeli. Și-a fixat, în urma numeroaselor lecturi și a unor principii sănătoase de viață, precum și sub influența lui Socrate, un cod al virtuților (în număr de 13), pe care le-a înscris într-un caiet, pentru fiecare având o coloană cu toate zilele săptămânii. Pe linie și pe coloană, nota în fiecare zi cu un punct fiecare greșală, după un examen zilnic, cum recomanda și Phitagora în „*versurile lui de aur*”. Se ocupa pe rând de fiecare virtute și, dorința sa era să elimine, pe rând, toate punctele, adică greșelile făcute. Realiza cicluri de 13 săptămâni și patru astfel de cicluri într-un an. Printre virtuțile urmărite erau *Ordinea*, care cerea ca fiecare treabă să aibă timpul ei. Franklin realizează o schemă pentru folosirea eficientă a celor 24 de ore ale unei zile obișnuite. Din această schemă reiese nr. orelor de muncă (10 ore efectiv), deșteptarea la ora 5 și culcarea devreme, la ora 22 (rugăciune+somn). Respectarea acestui program zilnic conducea la îndeplinirea proiectelor și, corelat, la întărirea celorlalte virtuți: *Hotărârea, Economia* și *Munca.* Acest proiect a continuat ani de zile.

În studiile sale, Franklin dă dovadă de mare ingeniozitate în folosirea numerelor. Găsește așa numitele „pătrate magice” (în care, adunarea numerelor de pe linii, de pe verticală și de pe diagonală dau aceiași sumă). Studiază și face experimente în legătură cu electricitatea, dă explicații cu ajutorul unor noțiuni matematice. El introduce o serie de termeni pe care îi folosim și azi: condensator, a electriza, pozitiv, negativ, butelia de Leyda, încăcare electrică, sarcină electrică. Studiază noțiuni de mecanica fluidelor și explică necesitatea trecerii la ora de vară cu date precise privind economia. El afirmă că: „*meritul cel mai mare al unei descoperiri este folosul ei*”.

Franklin a făcut experimente la Societatea Regală de Științe din Londra și la Academia de Științe de la Paris. În acest fel, el devine membru (fără taxă) al celor două prestigioase institute de știință. Franklin a fost contemporan cu Newton, dar ei nu s-au întâlnit niciodată. Activitatea lui Franklin poate fi considerată „newtoniană”, chiar dacă nu are demonstrații matematice ca a lui Newton.

Pentru o mai temeinică informare, trimitem cititorul să consulte urmatoarea

Bibliografie
[1] Ion Sava Nanu, *Benjamin Franklin*, Ed. Științifică, București, 1967;
[2] Cohen I. Bernard, *Franklin and Newton*, The American Philosophal Society Memoirs, vol. 43, 1956;
[3] Bernard Fay, *Benjamin Franklin – Bibliographie et etude sur les sources historiques relatives á sa vie*, Calman-Levy, Paris, 1930-1931;
[4] Benjamin Franklin, *Correspondence inedite et secrete du docteur Benjamin Franklin depuis l'année 1753 jusqu'en 1790*, Paris, 1817;
[5] George C. Moisil, *Cui i-e frică de fizica modernă*, Ed. Albatros, Bucureșt, 1981;
[6] Benjamin Franklin, *Autobiografie*, Fundația Regală pentru Literatură și Artă, București, 1942;
[7] *Experiènce et observations sur l'électricité faites a Philadelphie en Amerique par M. Benjamin Franklin,* Paris, 1752.

Răspunsurile la PROVOCARE

Ioan Dăncilă, București

1. Mesopotamiene, romane, chineze, grecești, etrusce, armene, indiene, maia, thai, egiptene, japoneze, slave, arabe.

2. 3 axe de rotație de ordinul 4, 6 axe de rotație de ordinul 2 și 4 axe de rotație de ordinul 3.

3. Suma primelor 13 numere prime este numărul 238 care are suma cifrelor ... 13 !

4. Triunghiul dreptunghic cu laturile 5, 12 și 13 este singurul care are perimetrul și aria 30.

5. În ecuația dată, $13^2 = 8^3 - 7^3$.

6. Numărul este 9867312 și se divide cu toate cifrele sale și cu 13.