

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**ETAPA LOCALĂ – VRANCEA****7 februarie 2026****CLASA a XI-a****SUBIECTUL 1.**

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu S_n suma elementelor matricei A^n .

- a) Să se arate că matricea A este inversabilă și că $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I_3$.
- b) Să se determine toate valorile lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $S_n = 7n$.

SUBIECTUL 2.

Pentru numerele naturale a și b , se consideră limita $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{an+1}{n+2} \right)^{\frac{(1-b)n^2+bn+1}{n+3}}$. Determinați toate perechile de numere $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, astfel încât valoarea limitei L să aparțină intervalului $(5; 10)$.

SUBIECTUL 3.

Se consideră matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = \begin{pmatrix} 2025 & 1 \\ 2026 & 1 \end{pmatrix}$. Demonstrați că matricea BA este inversabilă și că are loc relația $BA - (BA)^{-1} = 2026I_2$.

SUBIECTUL 4.

Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale definit prin $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $x_{n+1} = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}(x_n + 1)$ pentru orice $n \geq 1$.

Arătați că $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător și determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$.

Gazeta Matematică nr 9/2025

NOTĂ:

- *Timp de lucru 3 ore.*
- *Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.*

Propunători: prof. Daniela Sîrghie – Colegiul Național “Al. I. Cuza”- Focșani

prof. Mirela Verginica Pîrnu – Colegiul Național “Al. I. Cuza”- Focșani