

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ****ETAPA LOCALĂ – VRANCEA****7 februarie 2026****CLASA a XII-a****SUBIECTUL 1.**

Fie  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$  și  $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $f_1(x) = \begin{cases} x^k, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$ . Știind că  $f_2$  este o primitivă a lui  $f_1$  și  $f_3$  este o primitivă a lui  $f_2$  cu proprietatea  $f_1(1) = f_2(1) = f_3(1)$  se cer:

a) să se calculeze  $f_2(2)$ ;  
b) să se calculeze  $f_3(0)$ .

**SUBIECTUL 2.**

Pe  $\mathbb{R}$  se consideră legea de compoziție asociativă  $x \circ y = 2xy + 6x + 6y + 15$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$

a) Arătați că  $0 \circ 1 \circ 2 \circ \dots \circ n = 2^{n-1}(n+3)! - 3$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

b) Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea " $\circ$ " care verifică egalitatea  $x' = x \circ x$  (am notat cu  $x'$  simetricul lui  $x$  în raport cu " $\circ$ ").

**SUBIECTUL 3.**

Determinați:

- a)  $\int \frac{x}{1+x+e^x} dx$ ,  $x \in (0; +\infty)$ ;  
b)  $\int \frac{1}{x^3+x^7} dx$ ,  $x \in (0; +\infty)$ .

Suplimentul G.M. 10/2025

**SUBIECTUL 4.**

Fie  $G = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) \mid X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a-2b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, X \text{ este inversabilă} \right\}$

- a) Arătați că înmulțirea matricelor determină pe  $G$  o structură de grup abelian;  
b) Arătați că grupurile  $(G, \cdot)$  și  $(\mathbb{R}, +)$  nu sunt izomorfe.

**NOTĂ:**

- Timp de lucru 3 ore.
- Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

Propunători:

Prof. Cornel Noană, Colegiul Național "Unirea"

Prof. Mohonea Marius, Colegiul Național "Unirea"