

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

### ETAPA LOCALĂ - VRANCEA

7 februarie 2026

### BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE - Clasa a X-a

**SUBIECTUL 1.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale  $\mathbb{R}$ , ecuația :  $\sqrt{1-x^2} = 3x-4x^3$ .

$$\text{C.E. : } 1-x^2 \geq 0, 3x-4x^3 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1;1] \cap \left\{ \left[ -\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \cup \left[ 0; \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \right\} = \left[ -1; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \cup \left[ 0; \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{Ridicare la pătrat} \Rightarrow 16x^6 - 24x^4 + 10x^2 - 1 = 0 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{Notăm } x^2 = t, t \geq 0 \Rightarrow 16t^3 - 24t^2 + 10t - 1 = (2t-1)(8t^2 - 8t + 1) = 0 \dots\dots\dots 2\text{p}$$

$$t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ nu convine, } -\frac{\sqrt{2}}{2} > -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$t_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow x_2 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \in \left[ -1; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \left( x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ nu convine, } \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$t_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow x_3 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \in \left[ 0; \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \left( x = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ nu convine, } -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} > -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right\}$$

**SUBIECTUL 2.** Rezolvați în mulțimea numerelor complexe  $\mathbb{C}$ , inecuația :  $z^2 + z \leq 0$ .

$$z^2 + z \in \mathbb{R}, z = x+iy, x, y \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$z^2 + z = (x+iy)^2 + (x+iy) = (x^2 - y^2 + x) + i(2xy + y) \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$z^2 + z \in \mathbb{R} \Rightarrow y(2x+1) = 0 \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{Cazul 1. } y = 0 \Rightarrow z^2 + z = x^2 + x, z^2 + z \leq 0 \Rightarrow x^2 + x \leq 0 \Rightarrow x \in [-1;0] \dots\dots\dots 1\text{p}$$

$$\text{Cazul 2. } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow z^2 + z = -\frac{1}{4} - y^2, z^2 + z \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{4} + y^2 \geq 0 \Rightarrow y \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 2\text{p}$$

$$\text{Finalizare } z \in \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1;0] \right\} \cup \left\{ -\frac{1}{2} + iy \mid y \in \mathbb{R} \right\} \dots\dots\dots 1\text{p}$$

**SUBIECTUL 3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale  $\mathbb{R}$ , ecuația :  $3 \cdot 2^{\frac{x^2-1}{3}} = x^2 + 2$  .  
( G.M. - Supliment )

Prelucrare :  $2^{\frac{x^2-1}{3}} = \frac{x^2+2}{3} \Leftrightarrow 2^{\frac{x^2+2}{3}-1} = \frac{x^2+2}{3} \Leftrightarrow 2^{\frac{x^2+2}{3}} = 2 \cdot \frac{x^2+2}{3} \dots\dots\dots 2p$

Notăm  $\frac{x^2+2}{3} = t, t > 0 \Rightarrow 2^t = 2 \cdot t \dots\dots\dots 1p$

Considerăm funcțiile  $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = 2^t$  și  $g : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = 2t$   
 $f(t) = g(t) \Rightarrow t \in \{1; 2\}$  (  $G_f$  = curbă convexă ,  $G_g$  = dreaptă ,  $G_f \cap G_g =$  maxim 2 puncte) ..... 2p

$t_1 = 1 \Rightarrow \frac{x^2+2}{3} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \dots\dots\dots 1p$

$t_2 = 2 \Rightarrow \frac{x^2+2}{3} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \dots\dots\dots 1p$

$S = \{-2; -1; 1; 2\}$

**SUBIECTUL 4.** Se consideră mulțimea  $M$  a funcțiilor injective  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că :

$f(x) \cdot f(1-x) = f(ax+b), (\forall)x \in \mathbb{R}, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}.$

Arătați că : **a)**  $a = 0$  ;

**b)**  $f(1-b) = 1$  ;

**c)**  $f$  nu este funcție surjectivă ;

**d)**  $M \neq \emptyset$  .

**a)**  $x = 0 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = f(b)$   
 $x = 1 \Rightarrow f(1) \cdot f(0) = f(a+b)$  , deci  $f(b) = f(a+b), f \text{ inj.} \Rightarrow b = a+b \Rightarrow a = 0 \dots\dots\dots 1p$

**b)** Conform **a)**  $\Rightarrow f(x) \cdot f(1-x) = f(b), (\forall)x \in \mathbb{R}$  ,  
 Pentru  $x = b \Rightarrow f(b) \cdot f(1-b) = f(b) \Rightarrow f(b) \cdot [f(1-b) - 1] = 0 \dots\dots\dots 1p$

Presupunem că  $f(b) = 0 \Rightarrow f(x) \cdot f(1-x) = 0, (\forall)x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0$  sau  $f(1-x) = 0$  .

Dacă  $f(x) = 0, (\forall)x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$  nu este injectivă

Dacă  $f(1-x) = 0, (\forall)x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$  nu este injectivă

Dar  $f$  = injectivă , din ipoteză , deci  $f(b) \neq 0 \Rightarrow f(1-b) = 1 \dots\dots\dots 1p$

**c)** Conform **a)** și **b)**  $\Rightarrow f(x) \cdot f(1-x) = f(b) \neq 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$  .  
 Presupunem că  $(\exists)y \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f(y) = 0$  .

Dar  $f(x) \cdot f(1-x) = f(b) \neq 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$  și pentru  $x = y \Rightarrow f(y) \cdot f(1-y) = f(b) \neq 0 \dots\dots\dots 1p$

Cum  $f(y) = 0 \Rightarrow 0 \cdot f(1-y) = f(b) \Rightarrow f(b) = 0$ , fals !

Deci  $(\nexists)y \in \mathbb{R}$  a.î.  $f(y) = 0 \Rightarrow 0 \notin \text{Im}(f) \Rightarrow f$  nu este surjectivă ..... 1p

**d)**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x \dots\dots\dots 1p$   
 $f(x) \cdot (1-x) = 2^x \cdot 2^{1-x} = 2, (\forall)x \in \mathbb{R}$

Pentru  $x = b \Rightarrow f(b) \cdot f(1-b) = 2$  . Dar  $f(1-b) = 1$  (cf. **b)** ) deci  $f(b) = 2$  .

Funcția  $f(x) = 2^x$ , injectivă , verifică condiția  $f(x) \cdot f(1-x) = f(b), (\forall)x \in \mathbb{R} \Rightarrow M \neq \emptyset \dots\dots 1p$