

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-VRANCEA

7 februarie 2026

CLASA a XI-a

BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE

SUBIECTUL 1.

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu S_n suma elementelor matricei A^n .

- Să se arate că matricea A este inversabilă și că $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I_3$.
- Să se determine toate valorile lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $S_n = 7n$.

Soluție:

a) $\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow A$ inversabilă.....1p

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* \dots\dots\dots 3p$

Sau

$A(A^2 - 3A + 3I_3) = (A^2 - 3A + 3I_3)A = I_3 \dots\dots\dots 2p$

Deci A este inversabilă și $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I_3 \dots\dots\dots 2p$

b) Considerăm $B = A - I_3 \Rightarrow A = I_3 + B \dots\dots\dots 1p$

$B^3 = O_3 \Rightarrow A^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \dots\dots\dots 1p$

$S_n = n^2 + 3n + 3$. Cum $S_n = 7n \Rightarrow n \in \{1, 3\} \dots\dots\dots 1p$

SUBIECTUL 2.

Pentru numerele naturale a și b , se consideră limita $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{an+1}{n+2} \right)^{\frac{(1-b)n^2+bn+1}{n+3}}$. Determinați toate

perechile de numere $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, astfel încât valoarea limitei L să aparțină intervalului $(5; 10)$

Soluție:

$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+1}{n+2} = \begin{cases} 0, a=0 \\ a, a \geq 1 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-b)n^2 + bn + 1}{n+3} = \begin{cases} \infty, b=0 \\ 1, b=1 \\ -\infty, b \geq 2 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Caz 1. } a=0 \Rightarrow L = \begin{cases} 0, b=0 \\ 0, b=1 \\ \infty, b \geq 2 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Caz 2. } a=1 \Rightarrow L = \begin{cases} 1, b=1 \\ e^{b-1}, b \neq 1 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Caz 3. } a \geq 2 \Rightarrow L = \begin{cases} \infty, b=0 \\ a, b=1 \\ 0, b \geq 2 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{În concluzie } L \in (5;10) \Rightarrow (a,b) \in \{(1,3), (6,1), (7,1), (8,1), (9,1)\} \dots\dots\dots 2p$$

SUBIECTUL 3.

Se consideră matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = \begin{pmatrix} 2025 & 1 \\ 2026 & 1 \end{pmatrix}$. Demonstrați că matricea BA este inversabilă și că are loc relația $BA - (BA)^{-1} = 2026I_2$.

Soluție:

$$\left. \begin{aligned} \det(AB) &= -1 \Rightarrow \det A \cdot \det B = -1 \\ \det(BA) &= \det B \cdot \det A = \det A \cdot \det B = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \det(AB) \neq 0, \det(BA) \neq 0, \det A \neq 0, \det B \neq 0, \text{ de}$$

unde rezultă ca matricele AB, BA, A, B sunt inversabile și $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} \dots\dots\dots 3p$

Aplicând teorema lui Hamilton- Cayley pentru matricea AB obținem

$$(AB)^2 - \text{tr}(AB)AB + \det(AB)I_2 = O_2, \text{ adică } ABAB - 2026AB - I_2 = O_2 \quad (1) \dots\dots\dots 2p.$$

Înmulțind relația (1) la dreapta cu inversa lui B și la stânga cu inversa lui A obținem

$$BA - 2026I_2 - A^{-1}B^{-1} = O_2 \Rightarrow BA - (BA)^{-1} = 2026I_2 \dots\dots\dots 2p$$

SUBIECTUL 4.

Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale definit prin $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $x_{n+1} = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}(x_n + 1)$ pentru orice $n \geq 1$.

Arătați că $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător și determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n)$.

Soluție:

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}(x_n + 1) \Leftrightarrow \sqrt{n+2}x_{n+1} = \sqrt{n+1}x_n + \sqrt{n+1}$$

Notăm cu $y_n = \sqrt{n+1}x_n \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \sqrt{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$ și $y_1 = 1$ 1p

Obținem $y_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}$, de unde rezultă că $x_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ 1p

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1 - \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+2} \cdot \sqrt{n+1}} = \frac{1 + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}\right)}{\sqrt{n+2} \cdot \sqrt{n+1}} > 0, \text{ pentru orice număr natural } n$$

nenul, deci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător 2p

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{\sqrt{n+2} \cdot \sqrt{n+1}} - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+2} \cdot \sqrt{n+1}} \right) \dots\dots\dots 1p$$

$$l_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n+2} \cdot \sqrt{n+1}} = 1, l_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{i}}{\sqrt{n+2} \cdot \sqrt{n+1} (\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} \right) \stackrel{c.s.}{=} \frac{1}{3} \Rightarrow l = \frac{2}{3} \dots\dots\dots 2p$$