

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - VRANCEA

7 februarie 2026

CLASA a XII-a

BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE

SUBIECTUL 1.

a) f_1 este continuă, deci admite primitive de forma $f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^{k+1}}{k+1} + a, & x < 1 \\ \frac{x^2}{2} + b, & x \geq 1 \end{cases}$

$$\text{Din } 1 = f_1(1) = f_2(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_2(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_2(x) \Rightarrow 1 = \frac{1}{k+1} + a = \frac{1}{2} + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{k}{k+1}, b = \frac{1}{2} \Rightarrow f_2(2) = \frac{2^2}{2} + b = \frac{5}{2} \quad (3p)$$

b) f_2 este continuă, deci admite primitive de forma $f_3(x) = \begin{cases} \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)} + \frac{k}{k+1}x + \alpha, & x < 1 \\ \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x + \beta, & x \geq 1 \end{cases}$

$$\text{Din } 1 = f_1(1) = f_3(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_3(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_3(x) \Rightarrow 1 = \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{k}{k+1} + \alpha = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_3(0) = \alpha = \frac{1}{k+2} \quad (4p)$$

SUBIECTUL 2.

a) $x \circ y = 2xy + 6x + 6y + 15 = 2(x+3)(y+3) - 3 \quad (1p)$

Prin inducție se verifică egalitatea $0 \circ 1 \circ 2 \circ \dots \circ n = 2^{n-1}(n+3)! - 3 \quad (2p)$

b) Elementul neutru este $e = -\frac{5}{2} \quad (1p)$

$$x' = x \circ x \Leftrightarrow x \circ x \circ x = e \quad (1p)$$

$$x \circ x \circ x = e \Leftrightarrow 4(x+3)^3 - 3 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow (x+3)^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \quad (2p)$$

SUBIECTUL 3.

$$a) \int \frac{x}{1+x+e^x} dx = \int 1 - \frac{1+e^x}{1+x+e^x} dx = \quad (1p)$$

$$= x - \int \frac{(1+x+e^x)'}{1+x+e^x} dx = x - \ln(1+x+e^x) + C \quad (2p)$$

$$b) \int \frac{1}{x^3+x^7} dx = \int \frac{x^4+1-x^4}{x^3(1+x^4)} dx = \int \frac{1}{x^3} - \frac{x}{1+x^4} dx = \quad (2p)$$

$$= -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} dx = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} \arctg(x^2) + C \quad (2p)$$

SUBIECTUL 4.

a) Verificarea axiomelor de grup prin calcul sau proprietăți generale (I_2 element neutru) (4p)

b) Presupunem că există un izomorfism

$$f: G \rightarrow \square, f(X \cdot Y) = f(X) + f(Y) \text{ pentru orice } X, Y \in G \quad \text{și} \quad f(I_2) = 0 \quad (1p)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in G \quad \text{și} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \quad (1p)$$

$$0 = f(I_2) = f(A \cdot A) = f(A) + f(A) \Rightarrow f(A) = 0 = f(I_2) \Rightarrow f \text{ nu este injectivă (Fals)} \quad (1p)$$