

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

### ETAPA LOCALĂ – VRANCEA

7 februarie 2026

CLASA a VI-a

### BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE

#### SUBIECTUL 1

Se consideră mulțimile de numere naturale,  $A$  și  $B$ , care îndeplinesc simultan condițiile:

- (1) Elementele mulțimii  $A$  sunt 15 numere consecutive.
- (2) Elementele mulțimii  $B$  sunt 14 numere consecutive.
- (3) Elementele mulțimii  $A \cup B$  sunt 17 numere consecutive.
- (4) Suma elementelor mulțimii  $A$  este egală cu suma elementelor mulțimii  $B$ .

Aflați:

- a)  $\text{card}(A \cap B)$ ;
- b) elementele mulțimilor  $A$  și  $B$ .

#### Soluție

- a)  $\text{card}(A \cap B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cup B)$   
 $\text{card}(A \cap B) = 15 + 14 - 17 = 12$  ..... 1p  
 $\text{card}(A - B) = \text{card}A - \text{card}(A \cap B)$   
 $\text{card}(A - B) = 15 - 12 = 3$  ..... 1p
- b)  $\text{card}(B - A) = \text{card}B - \text{card}(A \cap B) = 14 - 12 = 2$   
 $A \cap B = \{n, n + 1, n + 2, n + 3, \dots, n + 11\}$  ..... 1p  
Caz I.  
 $A - B = \{n - 1, n - 2, n - 3\}, \quad B - A = \{n + 12, n + 13\}$  ..... 1p  
 $n - 1 + n - 2 + n - 3 = n + 12 + n + 13$  ..... 1p  
 $n = 31$   
 $A = \{28, 29, 30, 31, \dots, 42\}; B = \{31, 32, \dots, 42, 43, 44\}$  ..... 1p  
Caz II.  
 $A - B = \{n + 12, n + 13, n + 14\}, \quad B - A = \{n - 1, n - 2\}$   
 $n + 12 + n + 13 + n + 14 = n - 1 + n - 2$  nu are soluție număr natural ..... 1p

#### SUBIECTUL 2

a) Măsura unghiului  $\widehat{AOB}$  și măsura suplementului complementului său sunt invers proporționale cu 8, respectiv 2. Determinați măsura unghiului  $\widehat{AOB}$ .

b) Se consideră 11 unghiuri în jurul unui punct, având măsurile, în grade, exprimate prin numere naturale care dau același rest prin împărțirea la 10. Demonstrați că printre acestea există măcar două unghiuri cu aceeași măsură

#### Soluție

- a) Fie măsura unghiului  $\widehat{AOB} = x$ , suplementul complementului său este  $90^\circ + x$  ..... 1p  
 $8 \cdot x = 2 \cdot (90^\circ + x)$  ..... 1p  
 $x = 30^\circ$  ..... 1p

- b) Fie  $10c_1 + r, 10c_2 + r, \dots, 10c_{11} + r, r < 10$  numerele naturale ce reprezintă măsurile celor 11 unghiuri.  
 $10(c_1 + c_2 + \dots + c_{11}) + 11r = 360$  ..... 1p  
 deci  $11r$  este multiplu de 10.  
 Cum  $(11, 10) = 1 \Rightarrow r \in M_{10}$   
 Dar  $r < 10 \Rightarrow r = 0$  ..... 1p  
 $10(c_1 + c_2 + \dots + c_{11}) = 360 \Rightarrow c_1 + c_2 + \dots + c_{11} = 36$   
 $c_1, c_2, \dots, c_{11}$  sunt nenule ..... 1p  
 Suma primelor 11 numere naturale nenule distincte este  $66 > 36$  de unde  
 rezultă că printre acestea există măcar două unghiuri cu aceeași măsură. .... 1p

### SUBIECTUL 3

Demonstrați că  $E = \frac{36^n + 12 \cdot 6^n + 32}{5 \cdot 6^n + 40}$  este număr natural, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

Supliment *Gazeta Matematică*

#### Soluție

- Dacă  $n = 0$ , atunci  $E = \frac{36^0 + 12 \cdot 6^0 + 32}{5 \cdot 6^0 + 40} \Leftrightarrow E = 1$ , deci  $E \in \mathbb{N}$ . ..... 2p  
 Dacă  $n \neq 0$ , atunci  $E = \frac{(6^n + 8)(6^n + 4)}{5(6^n + 8)}$ , ..... 2p  
 de unde rezultă  $E = \frac{6^n + 4}{5}$  ..... 1p  
 Cum  $u(6^n) = 6$ , rezultă că  $u(6^n + 4) = 0$  și cum  $5 \mid \overline{\dots 0}$ , rezultă că  $E \in \mathbb{N}$ . .... 2p

### SUBIECTUL 4

Dacă  $(\overline{aba} + \overline{baa} + \overline{bb0}) : 13$ , atunci:

- a) arătați că  $(2a + 3b) : 13$ ;  
 b) aflați  $\overline{ab}$ , știind că nu este număr compus.

#### Soluție

- a)  $13 \mid (\overline{aba} + \overline{baa} + \overline{bb0}) \Leftrightarrow 13 \mid (112a + 220b)$ , dar  $13 \mid (104a + 208b)$ , de unde  
 rezultă  
 $13 \mid (8a + 12b) \Leftrightarrow$  ..... 1p  
 $13 \mid 4(2a + 3b)$  și cum  $(13, 4) = 1$ , rezultă  $13 \mid (2a + 3b)$  ..... 1p  
 b)  $a, b \neq 0 \Rightarrow 5 \leq 2a + 3b \leq 45$   
 Cum  $13 \mid (2a + 3b)$ , rezultă că  $2a + 3b \in \{13, 26, 39\}$ .  
 $\overline{ab} \neq \text{compus} \Rightarrow \overline{ab} = \text{nr. prim}$ , de unde  $b \in \{1, 3, 7, 9\}$ , ..... 1p  
 deci  $2a + 3b \neq 26$ .  
 I.  $b = 1; 2a + 3 = 13 \Leftrightarrow a = 5 \Rightarrow \overline{ab} = 51 (F)$  ..... 1p  
 $2a + 3 = 39 \Rightarrow a = 18 (F)$   
 II.  $b = 3; 2a + 9 = 13 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow \overline{ab} = 23$  ..... 1p  
 $2a + 9 = 39 \Rightarrow a = 15 (F)$   
 III.  $b = 7; 2a + 21 = 13 (F)$  ..... 1p  
 $2a + 21 = 39 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow \overline{ab} = 97$   
 IV.  $b = 9; 2a + 27 = 13 (F)$  ..... 1p  
 $2a + 27 = 39 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow \overline{ab} = 69 (F)$