

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ VRANCEA

7 februarie 2026

CLASA a VIII-a

BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE

SUBIECTUL 1

Se calculează $x^2 + y^2 = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = 5$ și $xy = 1$ 2p

$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 = 23$ și $x^8 + y^8 = (x^4 + y^4)^2 - 2(xy)^4 = 527$ 2p

$x^6 + y^6 = (x^4 + y^4)(x^2 + y^2) - (xy)^2(x^2 + y^2) = 110$ 1p

$x^{10} + y^{10} = (x^8 + y^8)(x^2 + y^2) - (xy)^2(x^6 + y^6) = 2525$ 1p

$a = x^{10} - x^8 + x^4 + x^2 + y^{10} - y^8 + y^4 + y^2 = 2525 - 527 + 23 + 5 = 2026$ 1p

SUBIECTUL 2

a) $\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) =$
 $= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = E(a, b, c)$ 2p

b) $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2$ 1p
 Suma a trei pătrate de numere naturale este 2, atunci două dintre ele sunt egale cu 1 și unul este 0, deci triunghiul este isoscel2p

c) Putem presupune $a \leq b < c$. Folosim inegalitățile dintre laturile unui triunghi. Avem
 $b < a + c$, de unde $b - a < c$ și prin ridicare la pătrat avem $(a-b)^2 < c^2$ și analoagele.....1p
 Prin adunare avem $E(a, b, c) = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] < \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = c^2$...1p

SUBIECTUL 3

a) Se consideră muchia cubului de lungime a u.m., O centrul feței ABCD.

$AC \perp (BDD')$, $D'B \subset (BDD') \Rightarrow AC \perp D'B$ 1p

$\Delta POB \sim \Delta PB'D'$, cu $D'B \cap B'O = \{P\} \Rightarrow \frac{PB}{PD'} = \frac{PO}{PB'} = \frac{OB}{B'D'} = \frac{1}{2}$ 1p

$$PB = \frac{a\sqrt{3}}{3}, PO = \frac{a\sqrt{6}}{6}, OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \Delta POB, OP^2 + BP^2 = OB^2 \Rightarrow \sphericalangle OPB = 90^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$D'B \perp B'O, D'B \perp AC; B'O, AC \subset (B'AC), B'O, AC \text{ concurente} \Rightarrow D'B \perp (B'AC) \dots\dots\dots 1p$$

b) Fie E mijlocul lui AB.

$B'Q$ înălțime în $\Delta B'D'A$ echilateral $\Rightarrow B'Q$ mediană în $\Delta B'D'A \Rightarrow Q$ mijlocul lui AD'

QE linie mijlocie în $\Delta ABD' \Rightarrow QE \parallel D'B \Rightarrow \sphericalangle(D'B, B'Q) = \sphericalangle(QE, B'Q) = \sphericalangle B'QE \dots\dots\dots 1p$

$$QE = \frac{a\sqrt{3}}{2}, B'E = \frac{a\sqrt{5}}{2}, B'Q = \frac{a\sqrt{6}}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\cos \sphericalangle B'QE = \frac{QE^2 + QB'^2 - B'E^2}{2QE \cdot QB'} = \frac{\sqrt{2}}{3} \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL 4

a) Fie M mijlocul muchiei AB, N mijlocul muchiei CD.

$$VM = VN = MN = a \text{ cm} \dots\dots\dots 1p$$

Fie $MQ \perp VN, Q \in VN$.

$MQ \perp (VDC), BE \perp (VDC) \Rightarrow MQ \parallel BE$

$MB \parallel (VDC) \Rightarrow d(M, (VDC)) = d(B, (VDC)) \Rightarrow MQ \equiv BE$

$MBEQ$ paralelogram $\Rightarrow CE \parallel NQ \dots\dots\dots 1p$

Fie $VP \parallel DC, P \in CE; VNCP$ paralelogram $\Rightarrow PC = VN = a \text{ cm}$

$MBPV$ paralelogram $\Rightarrow PB = VM = a \text{ cm}$. Obținem că ΔBCP este echilateral $\dots\dots\dots 1p$

$$\text{Fie } EF \perp BP, F \in BP. EF \perp (VAB) \Rightarrow d(E, (VAB)) = EF = \frac{a\sqrt{3}}{4} \text{ cm} \dots\dots\dots 1p$$

$$b) \sphericalangle(AE, (VAB)) = \sphericalangle(AE, AF) = \sphericalangle FAE \dots\dots\dots 1p$$

$$BE = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ cm}; AE = \frac{a\sqrt{7}}{2} \text{ cm} \dots\dots\dots 1p$$

$$\sin \sphericalangle FAE = \frac{FE}{AE} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{a\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14} \dots\dots\dots 1p$$