

## Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, 7.02.2026

Clasa a IX-a

Soluții și Bareme

**Subiectul 1** Determinați soluțiile întregi ale ecuației  $\left[\frac{2x+1}{5}\right] = \frac{3x-2028}{5}$ , unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului  $a$ .

**Soluție:**  $\frac{3x-2028}{5} = \frac{3(x-1)-2025}{5} = \frac{3(x-1)}{5} - 405 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x=5p+1, p \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 3p$

$\left[\frac{10p+3}{5}\right] = 3p - 405 \dots\dots\dots 2p$

$2p = 3p - 405 \Rightarrow p = 405 \Rightarrow x = 2026 \dots\dots\dots 2p$

**SUBIECTUL 2.** Fie  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{3} - 2\}$  și  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

- i) Să se arate că expresia  $\frac{x-(\sqrt{3}-\sqrt{4})}{\sqrt{3}x+2x+1}$  nu depinde de  $x$ .  
ii) Să se determine numerele raționale  $a$  și  $b$ , știind că  
 $\frac{a}{\sqrt{3}+2} + \sqrt{a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2} = (2a+b)\sqrt{3} + b + 2$ .

**Soluție:** i)  $\frac{x-(\sqrt{3}-2)}{x(\sqrt{3}+2)+1} \cdot \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2} = \frac{x(\sqrt{3}+2)+1}{x(\sqrt{3}+2)+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}+2} = 2 - \sqrt{3} \dots\dots\dots 2p$

ii)  $\frac{a}{\sqrt{3}+2} + \sqrt{a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2} = a(2 - \sqrt{3}) + |a - \sqrt{3}b| \dots\dots\dots 1p$   
 $a(2 - \sqrt{3}) + |a - \sqrt{3}b| = (2a+b)\sqrt{3} + b + 2$

Dacă  $a \geq \sqrt{3}b$ , atunci  $3a + \sqrt{3}(-a - b) = (2a+b)\sqrt{3} + b + 2 \dots\dots\dots 1p$

Se obține  $a = \frac{4}{9}$  și  $b = -\frac{2}{3}$ , care verifică  $\dots\dots\dots 1p$

Dacă  $a \leq \sqrt{3}b$ , atunci  $a + \sqrt{3}(-a + b) = (2a+b)\sqrt{3} + b + 2 \dots\dots\dots 1p$

Se obține  $a = 0$  și  $b = -2$ , care nu verifică  $\dots\dots\dots 1p$

**SUBIECTUL 3.** Fie  $ABCD$  un patrulater și  $M, N$  mijloacele laturilor  $AB$ , respectiv  $CD$ . Să se arate că  $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ .

**Soluție:**  $M$  mijlocul  $(AB) \Rightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = 2\overrightarrow{NM} \dots\dots\dots 3p$

$N$  mijlocul  $(CD) \Rightarrow \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN} \dots\dots\dots 3p$

$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MN}) = \vec{0} \dots\dots\dots 1p$

**SUBIECTUL 4.** Fie  $ABCD$  un patrulater și  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor acestuia. În exteriorul său se consideră punctele  $E$  și  $F$  astfel încât  $D$  și  $C$  să fie centrele de greutate ale triunghiurilor  $AEO$ , respectiv  $BFO$ . Știind că  $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB}$ , arătați că  $ABCD$  este paralelogram

**Soluție:**  $\overrightarrow{SD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SE} + \overrightarrow{SO})$ ,  $\overrightarrow{SC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{SO})$ , pentru orice punct  $S$  din plan  $\dots\dots\dots 2p$

Fie  $S = O \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE})$ ,  $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}) \dots\dots\dots 2p$

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB}) \dots\dots\dots 2p$

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow ABCD$  este paralelogram  $\dots\dots\dots 1p$