



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 07.02.2026

CLASA a IX - a

## BAREM DE CORECTARE

## Problema 1 (22,5p)

Fie  $x, y, z > 0$  astfel încât  $x \cdot y \cdot z = 8$ .a) Arătați că:  $x + y + z \geq 6$  și  $\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} \leq x + y + z$ ;b) Determinați numerele  $x, y, z > 0$  știind că ele verifică, în plus, și relația:

$$\frac{x^2}{y+3z+\sqrt{2x}} + \frac{y^2}{z+3x+\sqrt{2y}} + \frac{z^2}{x+3y+\sqrt{2z}} = \frac{6}{5}$$

**Soluție:**a) Din inegalitatea mediilor:  $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$  .....2pși cum  $x \cdot y \cdot z = 8$  se obține  $x + y + z \geq 6$  .....3pFolosind C-B-S  $\left((ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\right)$  .....2p

$$\text{Obținem: } (\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z})^2 \leq (\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2)(\sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 + \sqrt{z}^2)$$

$$\text{Deci: } (\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z})^2 \leq 6(x+y+z) \leq (x+y+z)^2 \quad \text{.....3p}$$

$$\text{Dar } x, y, z > 0 \Rightarrow \sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} \leq x + y + z \quad \text{.....3p}$$

b) Folosind inegalitatea lui Titu Andreescu avem:

$$\frac{x^2}{y+3z+\sqrt{2x}} + \frac{y^2}{z+3x+\sqrt{2y}} + \frac{z^2}{x+3y+\sqrt{2z}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{4x+4y+4z+\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}} \quad \text{.....3p}$$

$$\text{Avem: } \frac{x^2}{y+3z+\sqrt{2x}} + \frac{y^2}{z+3x+\sqrt{2y}} + \frac{z^2}{x+3y+\sqrt{2z}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{5(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{5} \geq \frac{6}{5} \quad \text{.....4p}$$

Egalitatea are loc doar dacă numerele sunt egale, deci  $x = y = z = 2$  .....2,5p

## Problema 2 (22,5p)

Să se demonstreze că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , are loc egalitatea:  $\sum_{k=1}^n \frac{k \cdot 2^{k-1}}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^n}{n+2} - \frac{1}{2}$

### Soluție:

Demonstrație prin inducție matematică

1.Verificare:  $v(P(1))=1$  ..... 3p

2.Demonstrație:

presupunem  $v(P(k))=1$  adică  $S_k = \sum_{i=1}^k \frac{i \cdot 2^{i-1}}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^k}{k+2} - \frac{1}{2}$  .....2,5p

și demonstrăm că  $v(P(k+1))=1$ :  $S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i \cdot 2^{i-1}}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{k+1}}{k+3} - \frac{1}{2}$  .....2p

Avem:  $S_{k+1} = S_k + \frac{(k+1) \cdot 2^k}{(k+2)(k+3)}$  .....2p

Obținem:  $S_{k+1} = \left( \frac{2^k}{k+2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{(k+1) \cdot 2^k}{(k+2)(k+3)}$  ..... 2p

$S_{k+1} = 2^k \left( \frac{1}{k+2} + \frac{(k+1)}{(k+2)(k+3)} \right) - \frac{1}{2}$  .....3p

$S_{k+1} = 2^k \frac{k+3+k+1}{(k+2)(k+3)} - \frac{1}{2} = 2^k \frac{2(k+2)}{(k+2)(k+3)} - \frac{1}{2}$  .....3p

De unde avem:  $S_{k+1} = \frac{2^k \cdot 2}{k+3} - \frac{1}{2} = \frac{2^{k+1}}{k+3} - \frac{1}{2} \Rightarrow v(P(k+1))=1$  ..... 3p

Finalizează:  $v(P(n))=1, \forall n \in \mathbb{N}^*$  .....2p

**Problema 3 (22,5p)**

Fie  $n$  și  $k$  două numere naturale prime între ele. Să se demonstreze egalitatea:

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3n}{k} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(k-1)n}{k} \right\rfloor = \frac{(n-1)(k-1)}{2}$$

**Soluție:**

Notăm  $S = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3n}{k} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(k-1)n}{k} \right\rfloor$  .....2p

$$2S = \left( \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(k-1)n}{k} \right\rfloor \right) + \left( \left\lfloor \frac{2n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(k-2)n}{k} \right\rfloor \right) + \dots + \left( \left\lfloor \frac{(k-1)n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right) \dots\dots\dots 3p$$

Avem:  $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor < \frac{n}{k} < \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1$  (1) .....2p

$$\left\lfloor \frac{(k-1)n}{k} \right\rfloor < \frac{(k-1)n}{k} < \left\lfloor \frac{(k-1)n}{k} \right\rfloor + 1$$
 (2) .....2,5p

Din adunarea rel. (1) și (2) obținem:  $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(k-1)n}{k} \right\rfloor < n < \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(k-1)n}{k} \right\rfloor + 2$  ....3p

Deci:  $n = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(k-1)n}{k} \right\rfloor + 1$  .....2p

Obținem:  $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(k-1)n}{k} \right\rfloor = n - 1$  .....2p

Analog și toate celelalte  $(k-1)$  paranteze din  $2S$  sunt egale cu  $n-1$  .....3p

Obține  $2S = (k-1)(n-1)$ , de unde  $S = \frac{(n-1)(k-1)}{2}$  .....3p

**Problema 4 (22,5p)**

Se consideră triunghiul  $ABC$ , punctul  $D$  mijlocul laturii  $[BC]$  și punctele  $M$ ,  $N$  și  $P$  din plan cu proprietatea că  $4\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$ ,  $5\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$  și  $5\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{BC}$ . Fie  $G$  centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  și  $PG \cap AB = \{Q\}$ .

a) Arătați că  $G \in MN$ ;

b) Aflați valoarea raportului  $\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{AB}}$ .

**Soluție:**

a) Din  $G$  centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  avem

$$\text{imediat } G \in AD \text{ și } \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG} = \dots = -\frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 4p$$

$$\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AN} = \dots = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{15}\overrightarrow{AC} \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{Deci: } \overrightarrow{MG} = \frac{5}{4}\overrightarrow{GN} \Rightarrow M, G, N - \text{coliniare} \Rightarrow G \in MN \dots\dots\dots 4p$$

b) Aplicăm Teorema lui Menelaus în triunghiul  $ABD$  cu transversala  $P-G-Q \Rightarrow$

$$\frac{BP}{PD} \cdot \frac{DG}{GA} \cdot \frac{QA}{QB} = 1 \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{Dar } \frac{DG}{GA} = \frac{1}{2} \text{ și află } \frac{BP}{PD} = 4 \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{Finalizează: } \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{AB}} = -1 \dots\dots\dots 2,5p$$

