



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 07.02.2026

CLASA a VIII - a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1(22,5p) a) Demonstrați că pentru orice $x \in [0; +\infty)$, are loc inegalitatea :

$$\frac{1}{x^2-6x+16} \leq \frac{x+2}{32}$$

b) Arătați că ,pentru orice $x, y, z \in [0, +\infty)$ astfel încât $x+y+z=6$,are loc

inegalitatea :
$$\frac{1}{x^2-6x+16} + \frac{1}{y^2-6y+16} + \frac{1}{z^2-6z+16} \leq \frac{3}{8}$$

Soluție: a) $x^2 - 6x + 16 = x^2 - 6x + 9 + 7 = (x - 3)^2 + 7 > 0$ 3p

Inegalitatea este echivalentă cu $(x + 2)(x^2 - 6x + 16) \geq 32$4p

După efectuarea calculelor avem: $x^3 - 4x^2 + 4x \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow$

$x(x - 2)^2 \geq 0$ adevărat pentru orice $x \geq 0$6,5p

b) Folosim inegalitatea de la a)
$$\frac{1}{x^2-6x+16} \leq \frac{x+2}{32}$$

$$\frac{1}{y^2-6y+16} \leq \frac{y+2}{32}$$

$$\frac{1}{z^2-6z+16} \leq \frac{z+2}{32} \dots\dots\dots 6p$$

Finalizarea
$$\frac{1}{x^2-6x+16} + \frac{1}{y^2-6y+16} + \frac{1}{z^2-6z+16} \leq \frac{x+y+z+6}{32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} \dots\dots\dots 3p$$



Problema 2 (22,5p) Dacă $x \in [-1; 3]$ și $y \in [-2; 7]$ iar $E(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y$, arătați că $E(x, y) \in [-5; 36]$

Soluție:

$$E(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y =$$

$$= x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 5 = (x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 5 \quad \dots\dots\dots 6,5p$$

$$x \in [-1; 3] \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x + 1 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq (x + 1)^2 \leq 16 \dots\dots\dots 5p$$

$$y \in [-2; 7] \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 7 \Leftrightarrow -4 \leq y - 2 \leq 5 \Leftrightarrow 0 \leq (y - 2)^2 \leq 25 \dots\dots\dots 5p$$

$$\text{Finalizare } 0 \leq (x + 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 41 \Leftrightarrow -5 \leq (x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 5 \leq 36 \Leftrightarrow$$

$$E(x, y) \in [-5; 36] \quad \dots\dots\dots 6p$$

Problema 3 (22,5p)

Se dă cubul $ABCD A'B'C'D'$ de muchie a . Fie Q piciorul perpendicularei din B pe $A'C$.

a) Arătați că $\frac{QC}{A'C} = \frac{1}{3}$

b) Dacă R este simetricul punctului D față de punctul A și $\{P\} = CR \cap DB$, arătați că $QP \parallel (ADD')$.

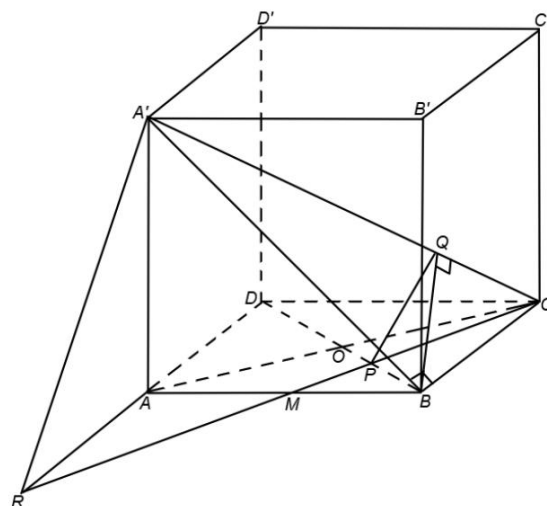
Soluție :

a)
$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp AB \\ AB \perp BC \\ AB, BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \xrightarrow{T3\perp} A'B \perp BC \Rightarrow \Delta A'BC \text{ dr în } B$$

$\xrightarrow{T.C.} \Rightarrow BC^2 = QC \cdot A'C \dots\dots\dots 5p$

$BC = a, A'B = a\sqrt{2}, A'C = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow a^2 = QC \cdot a\sqrt{3} \Rightarrow QC = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{QC}{A'C} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 5p$



b) Fie $\{M\} = CR \cap AB$

$R \text{ simetricul lui } D \text{ față de } A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A - \text{mijl } DR \\ AM \parallel DC \end{array} \right\} \Rightarrow AM - l.m. \Delta RDC \Rightarrow$

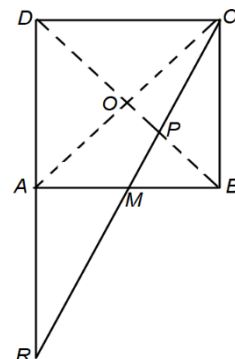
$\Rightarrow M - \text{mijl } CR$

$\Rightarrow AM = \frac{DC}{2} = \frac{AB}{2} \Rightarrow M - \text{mijl } AB \dots\dots\dots 4p$

$\left. \begin{array}{l} M - \text{mijl } AB \Rightarrow CM - \text{mediană } \Delta ABC \\ BO - \text{mediană } \Delta ABC \\ BO \cap CM = \{P\} \end{array} \right\} \Rightarrow P - c.g. \Delta ABC \Rightarrow CP = \frac{2}{3} \cdot CM \dots\dots\dots 3, 5p$

$\Rightarrow CP = \frac{2}{3} \cdot CM = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot CR = \frac{1}{3} \cdot CR \Rightarrow \frac{CP}{CR} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 2p$

$\left. \begin{array}{l} \Delta CA'R: Q \in CA', P \in CR, \frac{CQ}{CA'} = \frac{CP}{CR} = \frac{1}{3} \xrightarrow{R.T.Th} QP \parallel A'R \\ R \in AD \Rightarrow R \in (ADD'), A' \in (ADD') \Rightarrow A'R \subset (ADD') \end{array} \right\} \Rightarrow QP \parallel (ADD') \dots\dots\dots 3p$

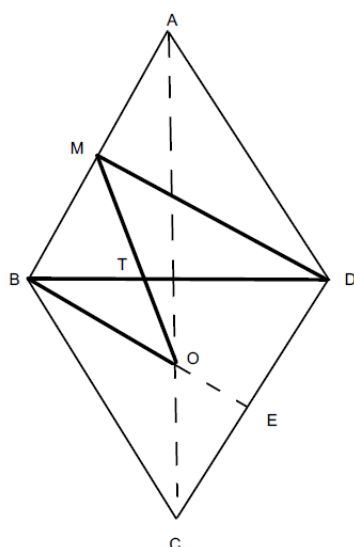


Problema 4 (22,5p)

În tetraedrul regulat ABCD, având muchia 30 cm, se știe că M este mijlocul muchiei AB, iar O centrul bazei BCD.

- Determinați poziția punctului T pe latura BD pentru care suma OT+TM este minimă;
- Aflați perimetrul triunghiului MTO, unde T este anterior determinat.

Soluție:



a) $OT + TM$ minimă

$\Leftrightarrow O, T, M$ coliniare în desfășurarea în plan

ABCD tetraedru regulat, DM și BE mediane în triunghiuri echilaterale congruente \Rightarrow DM și BE bisectoarele unghiurilor ADB, respective DBC $\Rightarrow \angle TDM = \angle TBO = 30^\circ$ 4p

$$\Delta TBO \sim \Delta TDM \Rightarrow \frac{TB}{TD} = \frac{BO}{DM} = \frac{TO}{TM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{TB}{BD} = \frac{2}{5} \Rightarrow TB = 12 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow TD = 18 \text{ cm} \dots\dots\dots 4p$$

b) $P_{\Delta MTO} = MT + TO + OM$

O centrul bazei $\Rightarrow AO \perp BO$

$$\Delta AOB \text{ dreptunghic în } O, OM \text{ mediană} \Rightarrow OM = \frac{AB}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OM = 15 \text{ cm} \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Fie } N \text{ mijlocul lui } BD \Rightarrow \begin{cases} BN = ND = 15 \text{ cm} \Rightarrow NT = 3 \text{ cm} \\ CN - \text{înălțime } \Delta BDC \text{ echilateral} = 15\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{În } \Delta BCD \text{ echilateral}, ON = \frac{1}{3}CN \Rightarrow ON = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{În } \Delta ONT \text{ dreptunghic în } N, \text{ aplicând teorema lui Pitagora avem } OT = 2\sqrt{21} \text{ cm} \dots\dots\dots 4p.$$

DM mediană în ΔABD echilateral $\Rightarrow DM \perp AB \Rightarrow \Delta BDM$ dreptunghic în M Fie $MR \perp$

$$BD, R \in (BD) \Rightarrow MR \text{ înălțime în } \Delta DMB \text{ dreptunghic în } M \Rightarrow MR = \frac{15\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$\text{În } \Delta BRM \text{ dreptunghic în } R, \text{ aplicând teorema lui Pitagora avem } BR = \frac{15}{2} \text{ cm} \Rightarrow TR = \frac{9}{2} \text{ cm}$$

$$\text{În } \Delta MRT, \text{ dreptunghic în } R, \text{ aplicând teorema lui Pitagora avem } MT = 3\sqrt{21} \text{ cm} \dots\dots\dots 5p.$$

$$P_{\Delta MTO} = 5(\sqrt{21} + 3) \text{ cm} \dots\dots\dots 2,5p.$$

