



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 07.02.2026

CLASA a VII - a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1 (22,5p)Fie numerele: $a = \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} + \dots + \sqrt{3^{2008}}$

$$b = \sqrt{9} + \sqrt{9^2} + \sqrt{9^3} + \dots + \sqrt{9^{2008}}$$

a) Calculați b;

b) Arătați că numărul $N = \frac{27a(3^{1004}+1)}{b(3+\sqrt{3})}$ este pătrat perfect.**Soluție:**

$$a) \quad b = \sqrt{9} + \sqrt{9^2} + \sqrt{9^3} + \dots + \sqrt{9^{2008}}$$

$$b = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2008}$$

3,5p

$$b = \frac{3^{2009} - 3}{2}$$

4p

$$b) \quad a = \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} + \dots + \sqrt{3^{2008}} \quad / \cdot \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}a = \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} + \dots + \sqrt{3^{2009}}$$

3p

Scădem egalitățile membru cu membru și obținem:

$$a(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3}(\sqrt{3^{2008}} - 1)$$

3p

$$a = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3^{2008}} - 1)}{(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3}(3^{1004} - 1)}{(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)(3^{1004} - 1)}{2}$$

4p

$$N = \frac{27\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)(3^{1004} + 1)(3^{1004} - 1)}{3(3^{2008} - 1)(3 + \sqrt{3})} = \frac{27}{3} = 9 - \text{pătrat perfect}$$

5p

Problema 2 (22,5p)

Arătați că: $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural n .

Soluție:

$$1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n(n+1)} > 0 \quad 4,5p$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{n(n+1)} \Leftrightarrow \left[1 + \frac{1}{n(n+1)}\right]^2 = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \quad 4p$$

$$\left[1 + \frac{1}{n(n+1)}\right]^2 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{n(n+1)} + \left[\frac{1}{n(n+1)}\right]^2 \quad 5p$$

$$1 + 2 \cdot \frac{1}{n(n+1)} + \left[\frac{1}{n(n+1)}\right]^2 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{n(n+1)} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 \quad 3p$$

$$1 + 2 \cdot \frac{1}{n(n+1)} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n^2} - 2 \cdot \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} \quad 3p$$

$$1 + 2 \cdot \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n^2} - 2 \cdot \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \quad 3p$$



Problema 3 (22,5p)

Fie paralelogramul ABCD cu $AB > BC$ și $AD = 15 \text{ cm}$. Bisectoarele unghiurilor \widehat{ADC} și \widehat{BCD} se intersectează într-un punct $M \in (AB)$ și $AC \cap BD = \{O\}$.

a) Calculați perimetrul paralelogramului ABCD;

b) Dacă $AC \cap DM = \{E\}$ determinați raportul $\frac{OE}{AC}$.

Soluție:

a) Se demonstrează că triunghiul $\triangle ADM$ isoscel

3p

Se demonstrează că triunghiul $\triangle BCM$ isoscel

3p

$AM = MB \rightarrow AB = 2AD = 30 \text{ cm} \rightarrow P = 90 \text{ cm}$

4,5p

b) E centrul de greutate în $\triangle ABD$

5p

Avem $\frac{OE}{AO} = \frac{1}{3}$

3p

Avem $\frac{OE}{AC} = \frac{1}{6}$

4p



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Problema 4 (22,5p)

Fie ABCD un pătrat și M un punct pe latura BC. De aceeași parte a lui AB se construiește pătratul AMNP. Arătați că punctele P, D și C sunt coliniare, iar $AC \perp CN$

supliment Gazeta Matematică

Soluție:

Din $\angle BAD = \angle MAP = 90^\circ$ rezultă $\angle BAM = \angle DAP$ 4,5p

Obținem $\triangle ABM \equiv \triangle ADP (L.U.L)$ rezultă $\angle ABM = \angle ADP = 90^\circ$ 5p

Iar $\angle PDC = \angle ADP + \angle ADC = 180^\circ \rightarrow P, D, C$ coliniare 4p

Cum AN, AC diagonale în pătratele AMNP, respectiv ABCD avem $\widehat{ANM} = 45^\circ$ și $\widehat{ACM} = 45^\circ$ 3p

Cum $\widehat{ANM} = \widehat{ACM}$ rezultă că patrulaterul AMCN inscriptibil 3p

Deci $\widehat{ACN} = \widehat{AMN} = 90^\circ$ atunci $AC \perp CN$ 3p