



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 07.02.2026

CLASA a VI - a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1 (22,5 p)

- a) Arătați că numărul $(2026 - 2026 : 2026)^{2025}$ este atât pătrat perfect, cât și cub perfect.
- b) Se consideră mulțimile $A = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, 2026^2\}$ și $B = \{1^3, 2^3, 3^3, \dots, 2026^3\}$.
Determinați cardinalul mulțimii $A \cap B$.

Soluție:

- a) $(2026 - 2026 : 2026)^{2025} = 2025^{2025} \dots\dots\dots 2,5p$
 $2025^{2025} = (45^{2025})^2 = \text{pătrat perfect} \dots\dots\dots 4p$
 $2025^{2025} = (2025^{675})^3 = \text{cub perfect} \dots\dots\dots 4p$
- b) $m \in A \cap B \Rightarrow m = x^6, x \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 4p$
Deoarece $2026^2 < 2026^3$, căutăm elementele m în mulțimea A :
 $1 \leq x^6 \leq 2026^2 \Rightarrow 1 \leq x^3 \leq 2026 \dots\dots\dots 4p$
Obținem $x \in \{1, 2, 3, \dots, 12\}$
Deci, $\text{card}(A \cap B) = 12 \dots\dots\dots 4p$



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Problema 2 (22,5 p)

Să se arate că fracția $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2025 + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2026 + 1}$ este ireductibilă.

Soluție:

Presupunem că există $d \in \mathbb{N}^*$, $d \neq 1$ astfel încât:

$d | 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2025 + 1$; $d | 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2026 + 1$ 5,5p

Deoarece $d | 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2025 + 1 \Rightarrow d | (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2025 + 1) \cdot 2026$

$\Rightarrow d | 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2025 \cdot 2026 + 2026$ 5p

Cum $d | 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2026 + 1 \Rightarrow d | 2025$ (prin diferență)4p

$d | 2025 \Rightarrow d | 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2025$ 4p

Cum $d | 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2025 + 1 \Rightarrow d | 1$ (prin diferență) $\Rightarrow d = 1$ (contradicție).....4p

**Problema 3 (22,5 p)**

Fie a, b, c numere naturale nenule. Dacă $a + b, b + c, c + a$ sunt direct proporționale cu 2023, 2024, 2025 arătați că $3 < \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} < 3,000003$.

(GM nr. 10/2024, Teclici Daniela, Huși)

Soluție:

$$\text{Avem } \frac{a+b}{2023} = \frac{b+c}{2024} = \frac{c+a}{2025} = \frac{2(a+b+c)}{2023+2024+2025} = \frac{a+b+c}{3036} \dots\dots\dots 5,5p$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a+b}{2023} = \frac{a+b+c}{3036} = \frac{c}{1013} \\ \frac{b+c}{2024} = \frac{a+b+c}{3036} = \frac{a}{1012} \\ \frac{c+a}{2025} = \frac{a+b+c}{3036} = \frac{b}{1011} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{1012} = \frac{b}{1011} = \frac{c}{1013} = k \\ a = 1012k \\ b = 1011k \\ c = 1013k \end{array} \right. \dots\dots\dots 5p$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{1012}{1011} + \frac{1011}{1013} + \frac{1013}{1012} = 1 + \frac{1}{1011} + 1 + \frac{1}{1012} + 1 - \frac{2}{1013} = 3 + \left(\frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} - \frac{2}{1013} \right) =$$

$$3 + \frac{3035}{1011 \cdot 1012 \cdot 1013} > 3 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} > 3 \dots\dots\dots 6p$$

$$3 + \frac{3035}{1011 \cdot 1012 \cdot 1013} < 3 + \frac{3039}{1011 \cdot 1012 \cdot 1013} = 3 + \frac{3}{1011 \cdot 1012} < 3 + \frac{3}{1000 \cdot 1000} = 3 + 0,000003 =$$

$$3,000003 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} < 3,000003 \dots\dots\dots 6p$$

Problema 4 (22,5 p)

Fie \widehat{MON} , \widehat{NOP} și \widehat{NOP} , \widehat{POQ} unghiuri adiacente două câte două. Suma măsurilor celor trei unghiuri este 140° și $2 \cdot \widehat{MON} = 5 \cdot \widehat{NOP}$, $3 \cdot \widehat{NOP} = 2 \cdot \widehat{POQ}$. Se consideră OA și OB bisectoarele unghiurilor \widehat{NOP} , respectiv \widehat{POQ} .

- Calculați măsurile unghiurilor \widehat{MON} , \widehat{NOP} și \widehat{POQ} ;
- Calculați măsura unghiului \widehat{AOB} .

Soluție:

- Notăm măsurile unghiurilor MON , NOP și POQ cu x , y , respectiv z

Atunci $x + y + z = 140^\circ \Rightarrow x + z = 140^\circ - y$ **4p**

$2x = 5y$, $3y = 2z$**3p**

Avem $2x + 2z = 8y$, deci $4y = x + z$**4,5p**

Vom obține $y = 28^\circ$**2p**

$x = 70^\circ$**2p**

$z = 42^\circ$ **2p**

- OA este bisectoarea $\widehat{NOP} \Rightarrow \widehat{AOP} = 14^\circ$,

OB este bisectoarea $\widehat{POQ} \Rightarrow \widehat{POB} = 21^\circ$ **3p**

$\widehat{AOB} = \widehat{AOP} + \widehat{POB} = 35^\circ$**2p**