



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 07.02.2026

CLASA a XII-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1 (22,5p)

Se consideră mulțimea $G = \left\{ A(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}_5, \det A(x, y) = \hat{1} \right\}$.

- a) Determină elementele mulțimii G .
- b) Arătați că (G, \cdot) este grup comutativ.
- c) Demonstrați că grupul (G, \cdot) este izomorf cu $(\mathbb{Z}_4, +)$.

Soluție:

- a) Din $\det A(x, y) = \hat{1} \Rightarrow x^3 + \hat{2}y^3 + \hat{2}xy^2 = \hat{1}$, 4p
de unde $(x, y) \in \{(\hat{1}, \hat{0}), (\hat{0}, \hat{2}), (\hat{1}, \hat{4}), (\hat{3}, \hat{4})\}$ 4p
 $\Rightarrow G = \{A(\hat{1}, \hat{0}), A(\hat{0}, \hat{2}), A(\hat{3}, \hat{4}), A(\hat{1}, \hat{4})\}$ 1,5p
- b) $A^2(\hat{0}, \hat{2}) = A(\hat{3}, \hat{4})$, $A^3(\hat{0}, \hat{2}) = A(\hat{1}, \hat{4})$, $A^4(\hat{0}, \hat{2}) = A(\hat{1}, \hat{0})$ 3p
Rezultă că (G, \cdot) este grup ciclic generat de $A(\hat{0}, \hat{2})$ 4p
- c) Tabla grupului $(\mathbb{Z}_4, +)$ 2p
Tablele celor două grupuri sunt structurate similar, deci (G, \cdot) este izomorf cu $(\mathbb{Z}_4, +)$ 4p

Problema 2 (22,5p)

Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow (0, 2)$ definită prin $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ și legea de compoziție „ \circ ” definită pe

$(0, 2)$ prin $x \circ y = \frac{xy}{xy - x - y + 2}$, unde $((0, \infty); \cdot)$ și $((0, 2); \circ)$ sunt grupuri comutative.

a) Demonstrați că $f(xy) = f(x) \circ f(y)$, pentru orice $x, y \in (0, \infty)$.

b) Determinați $x \in (0, 2)$ pentru care $x \circ x \circ x = \frac{4}{3}$.

Supliment Gazeta Matematică nr.10/2025

Soluție:

a) $f(xy) = \frac{2xy}{xy+1}$, $(\forall) x, y \in (0, \infty)$ **3p**

$$f(x) \circ f(y) = \frac{f(x) \cdot f(y)}{f(x) \cdot f(y) - f(x) - f(y) + 2} = \frac{\frac{2x}{x+1} \cdot \frac{2y}{y+1}}{\frac{2x}{x+1} \cdot \frac{2y}{y+1} - \frac{2x}{x+1} - \frac{2y}{y+1} + 2} = \dots \dots \dots \mathbf{4p}$$

$$= \frac{4xy}{2xy+2} = \frac{2xy}{xy+1}, (\forall) x, y \in (0, \infty) \Rightarrow f(xy) = f(x) \circ f(y), (\forall) x, y \in (0, \infty) \dots \dots \dots \mathbf{3,5p}$$

b) Demonstrăm că funcția f este inversabilă

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, (\forall) x, y \in (0, \infty) \Rightarrow f \text{ este strict crescătoare pe } (0, \infty) \Rightarrow f \text{ injectivă}$$

f continuă pe $(0, \infty)$ și $\text{Im } f = (0, 2) \Rightarrow f$ surjectivă

$$f \text{ bijectivă} \Rightarrow f \text{ inversabilă și } f^{-1} : (0, 2) \rightarrow (0, \infty), f^{-1}(x) = \frac{x}{2-x} \text{ inversa lui } f \dots \dots \dots \mathbf{3p}$$

f este izomorfism de grupuri $\Rightarrow f^{-1}$ este izomorfism de grupuri,

$$f^{-1}(x \circ y) = f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y), (\forall) x, y \in (0, 2) \dots \dots \dots \mathbf{3p}$$

$$f^{-1}(x \circ y \circ z) = f^{-1}((x \circ y) \circ z) = f^{-1}(x \circ y) \cdot f^{-1}(z) = f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y) \cdot f^{-1}(z), (\forall) x, y \in (0, 2)$$

$$x \circ x \circ x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow f^{-1}(x \circ x \circ x) = f^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \dots \dots \dots \mathbf{3p}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2-x}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2-x}\right)^3 = \sqrt[3]{2^3} \Leftrightarrow \frac{x}{2-x} = \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow x = \frac{4-2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}}{3} \in (0, 2) \dots \mathbf{3p}$$

Problema 3 (22,5p)

Calculați:

a) $\int \frac{\sin x + \cos x}{3 \sin x + 2 \cos x} dx, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$

b) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2026 + 2025 \sin 2x}} dx$

Soluție:

a) $\sin x + \cos x = A(3 \sin x + 2 \cos x) + B(3 \cos x - 2 \sin x) \Rightarrow \begin{cases} 3A - 2B = 1 \\ 2A + 3B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{5}{13} \\ B = \frac{1}{13} \end{cases} \dots\dots\dots 4p$

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{3 \sin x + 2 \cos x} dx = \frac{5}{13} \int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{3 \sin x + 2 \cos x} dx + \frac{1}{13} \int \frac{3 \cos x - 2 \sin x}{3 \sin x + 2 \cos x} dx = \dots\dots\dots 4p$$

$$= \frac{5}{13} x + \frac{1}{13} \ln(3 \sin x + 2 \cos x) + C \dots\dots\dots 4p$$

b) Dacă $I = \int \frac{\cos x}{\sqrt{2026 + 2025 \sin 2x}} dx$, se consideră $J = \int \frac{\sin x}{\sqrt{2026 + 2025 \sin 2x}} dx$.

Atunci $I + J = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2026 + 2025 \sin 2x}} dx = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{4051 - 2025(\sin x - \cos x)^2}} dx =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2025}} \int \frac{(\sin x - \cos x)'}{\sqrt{\frac{4051}{2025} - (\sin x - \cos x)^2}} dx = \frac{1}{45} \arcsin\left(\frac{45}{\sqrt{4051}}(\sin x - \cos x)\right) + C \dots\dots\dots 4p$$

$$I - J = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2026 + 2025 \sin 2x}} dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{1 + 2025(\sin x + \cos x)^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2025}} \int \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sqrt{\frac{1}{2025} + (\sin x + \cos x)^2}} dx = \frac{1}{45} \ln\left(\sin x + \cos x + \sqrt{\frac{1}{2025} + (\sin x + \cos x)^2}\right) + C \dots\dots 4p$$

Deci $I = \frac{1}{90} \left(\arcsin \frac{45(\sin x - \cos x)}{\sqrt{4051}} + \ln\left(\sin x + \cos x + \sqrt{\frac{1}{2025} + (\sin x + \cos x)^2}\right) \right) + C \dots\dots\dots 2,5p$

Problema 4 (22,5p)

Calculați:

a) $\int_0^1 \frac{2^x}{2^{2x} - 2^{x+1} + 2} dx;$

b) $\int_0^1 \frac{x}{2^x + 2^{1-x} - 2} dx.$

Soluție:

a) Notăm $I = \int_0^1 \frac{2^x}{2^{2x} - 2^{x+1} + 2} dx = \int_0^1 \frac{2^x}{2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 2} dx = \int_0^1 \frac{2^x}{(2^x - 1)^2 + 1} dx. \dots\dots\dots 4p$

Folosind schimbarea de variabilă $2^x - 1 = t$ obținem $I = \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt = \dots\dots\dots 4p$

$= \frac{1}{\ln 2} \arctgt|_0^1 = \frac{\pi}{4 \ln 2} \dots\dots\dots 4p$

b) Notăm $J = \int_0^1 \frac{x}{2^x + 2^{1-x} - 2} dx$. Folosind schimbarea de variabilă $x = 1 - t$ obținem

$J = \int_0^1 \frac{1-t}{2^t + 2^{1-t} - 2} dt = \int_0^1 \frac{1}{2^t + 2^{1-t} - 2} dt - \int_0^1 \frac{t}{2^t + 2^{1-t} - 2} dt = \dots\dots\dots 4,5p$

$= \int_0^1 \frac{2^t}{2^{2t} - 2^{t+1} + 2} dt - J = I - J \dots\dots\dots 3p$

$2J = I \Rightarrow J = \frac{\pi}{8 \ln 2} \dots\dots\dots 3p$