

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 07.02. 2026

CLASA a XI-a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1 (22,5p)

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2026 \\ 2026 & 1 & 1013 \cdot 2027 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(R)$.

a) Arătați că dacă $X \in M_3(R)$ verifică relația $AX = XA$, atunci există $m, n, p \in R$ astfel

$$\text{încât } X = \begin{pmatrix} m & 0 & n \\ n & m & p \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

b) Determinați $X \in M_3(R)$ astfel încât $X^{2026} = A$.

Soluție:

a) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(R)$.

Din $AX = XA \Rightarrow a = e = h = m \in R, b = g = h = 0, c = d = n \in R, f = p \in R$5p

b) $X^{2027} = X^{2026}X = AX, X^{2027} = XX^{2026} = XA \Rightarrow$ există $m, n, p \in R$ astfel încât

$$X = \begin{pmatrix} m & 0 & n \\ n & m & p \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \text{ conform punctului a).} \dots\dots\dots 4p$$

$$\det(X^{2026}) = \det A \Rightarrow (\det X)^{2026} = 1 \Rightarrow \det X = 1 \text{ sau } \det X = -1$$

Dar $\det X = m^3 \Rightarrow m = 1 \text{ sau } m = -1$3,5p

$$\text{Cum } X = \begin{pmatrix} m & 0 & n \\ n & m & p \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} = mI_3 + B, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n \\ n & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = O_3,$$

$$X^{2026} = m^{2026}I_3 + m^{2025}C_{2026}^1 B + m^{2024}C_{2026}^2 B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n \\ n & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{Dacă } m = 1 \Rightarrow X^{2026} = I_3 + C_{2026}^1 B + C_{2026}^2 B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2026n \\ 2026n & 1 & 2026p + 1013 \cdot 2027n^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Cum $X^{2026} = A \Rightarrow n = p = 1 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$3p

Analog, pentru $m = -1$, se obține $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$3p

Problema 2 (22,5p)

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ cu $x_0 = 0$ și $x_{n+1} = x_n + a + \sqrt{b + 4ax_n}$, pentru orice $n \in N$, unde $a, b > 0$.
 Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n^2}$.

Soluție:

Prin inducție se demonstrează că $x_n > 0$, $(\forall) n \in N^*$ 4p

Deoarece $x_{n+1} - x_n = a + \sqrt{b + 4ax_n} > 0$, $(\forall) n \in N^*$ rezultă că șirul este strict crescător..4p

Presupunem că șirul este mărginit superior, atunci el este convergent $\Rightarrow (\exists) \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l \in R$.

Trecând la limită în relația de recurență se obține că $l = l + a + \sqrt{b + 4al} \Rightarrow$

$0 = a + \sqrt{b + 4al}$ fals, deci presupunerea făcută este falsă, deci șirul este nemărginit superior și fiind strict crescător $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ 4,5p

$$\begin{aligned} \text{Calculăm } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}}{n+1-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a + \sqrt{b^2 + 4ax_n}}{\sqrt{x_n + a + \sqrt{b^2 + 4ax_n}} + \sqrt{x_n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x_n} \left(\frac{a}{\sqrt{x_n}} + \sqrt{\frac{b^2}{x_n} + 4a} \right)}{\sqrt{x_n} \left(\sqrt{1 + \frac{a}{x_n} + \frac{b^2}{x_n^2} + \frac{4a}{x_n}} + 1 \right)} = \frac{2\sqrt{a}}{2} = \sqrt{a} \dots\dots\dots 6p \end{aligned}$$

Deoarece șirul $\left(\frac{x_n}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ este cu termeni pozitivi și $(\exists) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n} = \sqrt{a}$, va exista și

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n^2} = a \dots\dots\dots 4p$$

Problema 3 (22,5p)

Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } X(a) = I_3 + aA, \text{ unde } a \in \mathbb{C}^*, k \in \mathbb{N}^*.$$

a) Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X((k+1)ab + a + b)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{C}^*, k \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se calculeze $(X(a))^n, n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

a) Calculează $A^2 = (k+1) \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (k+1)A$, iar apoi

$$X(a) \cdot X(b) = I_3 + aA + bA + (k+1)abA = X((k+1)ab + a + b) \dots \dots \dots 5p$$

b) $X(a) \cdot X(b) = X\left((k+1)\left(a + \frac{1}{k+1}\right)\left(b + \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{k+1}\right)$

Deci $(X(a))^2 = X\left((k+1)\left(a + \frac{1}{k+1}\right)^2 - \frac{1}{k+1}\right) \dots \dots \dots 5p$

$$(X(a))^3 = X\left((k+1)^2\left(a + \frac{1}{k+1}\right)^3 - \frac{1}{k+1}\right) \dots \dots \dots 4p$$

$$(X(a))^n = X\left((k+1)^{n-1}\left(a + \frac{1}{k+1}\right)^n - \frac{1}{k+1}\right) \dots \dots \dots 4p$$

Finalizare inducție matematică.....4,5p

Problema 4 (22,5p)

Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \dots \cdot \cos 2^n x}{(x - \pi)^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \dots \cdot \cos 2^n x}{(x - \pi)^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$ se găsește în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$ 4p

Se face substituția $y = x - \pi$, $y \rightarrow 0$

și limita devine $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y \cdot \cos 2y \cdot \cos 4y \cdot \dots \cdot \cos 2^n y}{y^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$ 5p

La numărător facem artificio de calcul:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \dots \cdot \cos 2^n x}{(x - \pi)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y + \cos y - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \dots \cdot \cos 2^n x}{y^2} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos y (1 - \cos 2y \cos 4y \cdot \dots \cdot \cos 2^n y)}{y^2} = \dots = \sum_{k=0}^n \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2^k y}{y^2} \dots 5,5p$$

$$= \sum_{k=0}^n \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2^{k-1} y}{y^2} = \sum_{k=0}^n \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2^{k-1} y}{(2^{k-1} y)^2} \cdot \frac{2^{2k-2} \cdot y^2}{y^2} =$$

$$= 2 \sum_{k=0}^n \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2^{2k-2} \cdot y^2}{y^2} = 2 \sum_{k=0}^n 2^{2k-2} \dots \dots \dots 4p$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n 2^{2k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{2n+2} - 1}{3} = \frac{2^{2n+2} - 1}{6} \dots \dots \dots 4p$$