



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 07.02.2026
CLASA a X - a
BAREM DE CORECTARE

Problema 1 (22,5p)

Fie expresia $E(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \cdot \sqrt[3]{\sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{4}}, x \in \mathbf{R}$.

a) Arătați că $E(x) \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

b) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $E(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 1$.

Soluție:

a) $E(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi x}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi x}{4}} \dots\dots\dots 4p$

$= \sqrt[3]{\sin \frac{\pi x}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi x}{4} \sin \frac{\pi}{4}} \dots\dots\dots 4p$

$= \sqrt[3]{\sin \left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{4} \right)} \leq \sqrt[3]{1} = 1, \forall x \in \mathbf{R} \dots\dots\dots 4p$

b) $F(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 1 = \sqrt[6]{x^4} - 2\sqrt[6]{x^3} + \sqrt[6]{x^2} + 1 = 1 + \sqrt[6]{x^2} (\sqrt[6]{x} - 1)^2 \geq 1 \dots\dots\dots 4p$

Deci $E(x) \leq 1 \leq F(x), \forall x \in [0, \infty)$. $E(x) = F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} E(x) = 1 \\ F(x) = 1 \end{cases} \dots\dots\dots 4p$

$F(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = 1$; numai $x = 1$ verifică și $E(x) = 1 \dots\dots\dots 2,5p$



Problema 2 (22,5p)

Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, astfel încât $f(f(x)) = x^{2025}f(x)$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

a) Calculați $f(0)$.

b) Demonstrați că dacă $f(x) \neq 0$, pentru orice $x \in \mathbf{R}^*$ atunci f este injectivă.

Soluție:

a) Notăm $f(0) = a$.

$$f(a) = f(f(0)) = 0 \dots\dots\dots 4p$$

$$f(f(a)) = a^{2025}f(a) = 0 \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{Concluzie } f(0) = 0 \dots\dots\dots 4p$$

b) Fie $x, y \in \mathbf{R}$ astfel încât $f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow$

$$x^{2025}f(x) = y^{2025}f(y) \Rightarrow f(x)(x^{2025} - y^{2025}) = 0 \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{Dacă } f(x) = 0 = f(y), \text{ cum } f(x) \neq 0, \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R}^* \text{ și } f(0) = 0 \Rightarrow x = y = 0 \quad 4p$$

$$\text{Dacă } x^{2025} = y^{2025} \Rightarrow x = y$$

$$\text{Finalizare: } f \text{ injectivă} \dots\dots\dots 2,5p$$



Problema 3 (22,5p)

Fie funcția : $(0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(\log_2 x - 5) = \frac{x}{32}$.

a) Determinați valoarea lui x pentru care $\log_2 x - 5 = \log_2 8 + \log_{\sqrt[4]{2}} \sqrt{2} - \log_{\sqrt[3]{2}}^2 2$.

b) Calculați $S = f(1) + f(2) + \dots + f(2026)$.

Soluție:

a) $\log_2 8 = 3, \log_{\sqrt[4]{2}} \sqrt{2} = 1$ 4p

$\log_{\sqrt[3]{2}}^2 2 = 9$ 4p

Finalizare $x = 1 \in (0, \infty)$ 4p

b) Cu notația $t = \log_2 x - 5$ se obține $x = 2^{t+5} \Rightarrow f(t) = 2^t$ 4p

$S = f(1) + f(2) + \dots + f(2026) = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2026}$ 3p

Finalizare $S = 2^{2027} - 2$ 3,5p

Problema 4 (22,5p)

În planul complex se consideră punctele $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ cu $z_A, z_B, z_C \in \mathbb{C}^*$, astfel încât

$$z_A + z_B + z_C = 0 \text{ și } |z_A| = |z_B| = |z_C|.$$

- a) Arătați că $z_A^2 + z_B^2 + z_C^2 = 0$.
- b) Calculați $(z_A - z_H)^2 + (z_B - z_G)^2 + (z_C - z_O)^2$, unde z_H, z_G și z_O sunt afixele ortocentrului, centrului de greutate, respectiv al centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

Soluție:

a) Din $|z_A| = |z_B| = |z_C| = k$ și $\bar{z}_A + \bar{z}_B + \bar{z}_C = 0$ 4p

rezultă $\frac{k^2}{z_A} + \frac{k^2}{z_B} + \frac{k^2}{z_C} = 0$ adică $z_A z_B + z_A z_C + z_B z_C = 0$ 4p

$z_A^2 + z_B^2 + z_C^2 = (z_A + z_B + z_C)^2 - 2(z_A z_B + z_A z_C + z_B z_C) = 0$ 4p

b) Din $|z_A| = |z_B| = |z_C| \Rightarrow OA = OB = OC$, unde O (originea sistemului de coordonate) este centrul cercului circumscris triunghiului ABC 4p

Ținem seama că $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 0 = z_O \Rightarrow O = G \Rightarrow \Delta ABC$ este echilateral 3,5p

Cum $z_H = z_G = z_O = 0$, din a) rezultă $(z_A - z_H)^2 + (z_B - z_G)^2 + (z_C - z_O)^2 = 0$ 3p