

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ - 07 februarie 2026  
Clasa a VIII-a  
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

**PROBLEMA 1**

Aflați numerele reale  $x$  și  $y$  pentru care avem:

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 25} + \sqrt{4x^2 + 12xy + 9y^2 + 64} \leq 12.$$

**SOLUȚIE:**

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 25} = \sqrt{(4x^2 - 12x + 9) + 16} = \sqrt{(2x - 3)^2 + 4^2} \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Cum } (2x-3)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{(2x - 3)^2 + 4^2} \geq 4 \quad (1) \dots\dots\dots 2p$$

$$\sqrt{4x^2 + 12xy + 9y^2 + 64} = \sqrt{(2x + 3y)^2 + 8^2} \geq 8 \quad (2) \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Din (1) + (2)} \Rightarrow \sqrt{4x^2 - 12x + 25} + \sqrt{4x^2 + 12xy + 9y^2 + 64} \geq 12 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{și folosind și afirmația că } \sqrt{4x^2 - 12x + 25} + \sqrt{4x^2 + 12xy + 9y^2 + 64} \leq 12 \Rightarrow \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow \sqrt{4x^2 - 12x + 25} + \sqrt{4x^2 + 12xy + 9y^2 + 64} = 12 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 3p$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x - 3)^2 + 4^2} = 4 \text{ și } \sqrt{(2x - 3y)^2 + 8^2} = 8 \dots\dots\dots 3p$$

$$\Leftrightarrow 2x-3=0 \text{ și } 2x+3y=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \text{ și } y=-1 \dots\dots\dots 2p$$

**PROBLEMA 2**

1. Calculați raportul dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor  $a$  și  $b$ , unde

$$a = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} \text{ și}$$

$$b = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

**SOLUȚIE:**

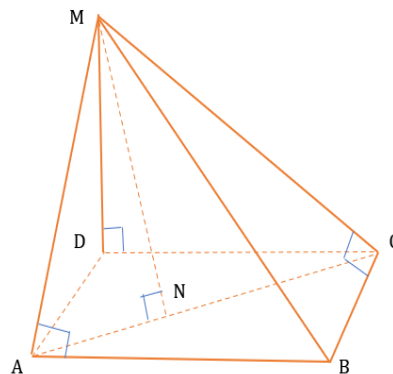
$$\begin{aligned}
 a &= |1 - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - 2| \dots\dots\dots 1p \\
 a &= \sqrt{3} - 1 + 2 - \sqrt{3} = 1 \dots\dots\dots 2p \\
 b &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{\left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}\right) \cdot \left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}\right)} \dots\dots\dots 3p \\
 b &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \dots\dots\dots 3p \\
 b &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right) \left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)} \dots\dots\dots 2p \\
 b &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \dots\dots\dots 2p \\
 b &= 1 \dots\dots\dots 2p \\
 m_a &= 1 \dots\dots\dots 3p \\
 m_g &= 1 \dots\dots\dots 2p \\
 \frac{m_a}{m_g} &= 1 \dots\dots\dots 1p
 \end{aligned}$$

### PROBLEMA 3

Pe planul unui dreptunghic ABCD se ridică perpendiculara DM astfel încât  
MA=8cm, MB=10cm și MC=5 $\sqrt{3}$  cm.

Calculați:

- aria dreptunghiului;
- tangenta unghiului format de planul (MBC) cu planul dreptunghiului;
- distanța de la M la AC.



**SOLUȚIE:**

$$\left. \begin{array}{l} MD \perp (ABCD) \\ DA \perp AB, \\ DA, AB \subset (ABC) \end{array} \right\} T3 \perp$$

$$\Rightarrow MA \perp AB \dots\dots\dots 3p$$

$$\Rightarrow \Delta MAB \text{ dreptunghic în } A \Rightarrow AB^2 = MB^2 - MA^2 \Rightarrow AB = 6 \text{ cm.} \dots\dots\dots 2p$$

$$DA \subset (ABCD)$$

$$MD \perp (ABCD) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} T3 \perp$$

$$DC \perp CB$$

$$DC, BC \subset (ABCD)$$

$$\Rightarrow MC \perp CB \Rightarrow \dots\dots\dots 3p$$

$$\Delta MCB \text{ dreptunghic în } C \Rightarrow BC^2 = MB^2 - MC^2 \Rightarrow BC = 5 \text{ cm.} \dots\dots\dots 2p$$

$$A_{ABCD} = 30 \text{ cm}^2. \dots\dots\dots 2p$$

$$b) \text{ În } \Delta MDC, MD^2 = MC^2 - DC^2 \Rightarrow MD^2 = 75 - 36 = 39 \Rightarrow MD = \sqrt{39} \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{tg}(\sphericalangle MCD) = \frac{MD}{DC} = \frac{\sqrt{39}}{6}. \dots\dots\dots 2p$$

$$c) MD \perp (ABCD) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} T3 \perp$$

$$\text{Ducem } DN \perp AC \quad \Rightarrow MN \perp AC \Rightarrow d(M, AC) = MN. \dots\dots\dots 2p$$

$$DN, AC \subset (ABCD)$$

$$AC = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61} \dots\dots\dots 1p$$

TP

$$\text{În } \Delta MDN \text{ dreptunghic în } D \Rightarrow MN^2 = MD^2 + DN^2 \Rightarrow MN = \sqrt{\frac{3279}{61}} \dots\dots\dots 1p$$

#### PROBLEMA 4

În triunghiul ABC, dreptunghic în A,  $MD \perp AB$ , unde D este mijlocul laturii AB. Se cunosc:  $BC = 10 \text{ cm}$ ,  $MC = 13 \text{ cm}$ ,  $MA = 12 \text{ cm}$  și  $m(\sphericalangle ABC) = 30^\circ$ .

Calculați aria triunghiului MDC.

#### SOLUȚIE

$$\text{În } \Delta ABC, \sphericalangle A = 90^\circ, BC = 10 \text{ cm}, \sphericalangle ABC = 30^\circ \xrightarrow{T. \sphericalangle 30^\circ} AC = 5 \text{ cm.} \dots\dots\dots 3p$$

$$\Delta MAC: MA = 12 \text{ cm}, MC = 13 \text{ cm}, AC = 5 \text{ cm} \xrightarrow{R.T.P.} \dots\dots\dots 3p$$

$\Delta MAC$  este dreptunghic în A

$$\left. \begin{array}{l} MA \perp AC \\ DA \perp AC \\ MD \perp AB \\ DA, AC \subset (ABC) \end{array} \right\} \xrightarrow{R2T3P} \left. \begin{array}{l} MD \perp (ABC) \\ DC \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow MD \perp DC \Rightarrow \dots\dots\dots 3p$$

$$A_{MDC} = \frac{MD \cdot DC}{2} \dots\dots\dots 1p$$



$$\Delta DAC, \sphericalangle DAC = 90^\circ \xRightarrow{T.P.} DC = \frac{5\sqrt{7}}{2} \text{ cm} \dots\dots\dots 4p$$

$$\Delta MDA, \sphericalangle MDA = 90^\circ \xRightarrow{T.P.} MD = \frac{\sqrt{501}}{2} \text{ cm} \dots\dots\dots 4p$$

$$A_{MDC} = \frac{5\sqrt{3507}}{8} \text{ cm}^2 \dots\dots\dots 3p$$

**Notă: Timp de lucru – 3 ore.**

**Fiecare subiect este notat cu 21puncte.**

**Se acordă 16 puncte din oficiu.**

**Toate subiectele sunt obligatorii.**

**Orice soluție corectă diferită de cea din barem este punctată corespunzător.**