

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ -07 februarie 2026
Clasa a VI a**

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

PROBLEMA 1.

Fie $A = \left\{ \frac{2035}{10}, \frac{2036}{11}, \frac{2037}{12}, \dots \right\}$. Determinați cardinalul mulțimii $A \cap \mathbb{N}$.

(G M Nr. 9/2025, E: 17295)

SOLUȚIE:

Se observă că $A = \left\{ \frac{2035+n}{10+n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$,5p

iar, $\frac{2035+n}{10+n} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 10+n \mid 2035+n$ 5p

Dar, $10+n \mid 10+n$ 1p

.....
 $10+n \mid 2035+n-(10+n) \Rightarrow$ 1p

$\Rightarrow 10+n \mid 2025 \Rightarrow 10+n \in \mathcal{D}_{2025}$ 1p

$2025 = 3^4 \cdot 5^2$, iar 2025 are $(4+1)(2+1) = 15$ divizori4p

Dintre aceștia excludem divizorii mai mici decât 10, adică pe 1, 3, 5 și 9 rămân

$15-4=11$ divizori \Rightarrow 2p.

$\Rightarrow 11$ valori pentru $n \Rightarrow \text{card}(A \cap \mathbb{N}) = 11$ 2p

PROBLEMA 2.

Aflați numerele naturale a și b știind că $[a, b]$ este de 15 ori mai mare decât (a, b) și $5a + 3b = 150$.

(S-a notat cu $[a, b]$ cel mai mic multiplu comun și cu (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b .)

SOLUȚIE:

Fie $d = (a, b) \Rightarrow a = da', b = db'$, a', b' prime între ele.....2p

Cum $[a, b] = da'b' \Rightarrow da'b' = 15d \Rightarrow a'b' = 15$5p

Avem de studiat 4 cazuri:

1) $a' = 1, b' = 15 \Rightarrow a = 3, b = 45$5p

2) $a' = 3, b' = 5 \Rightarrow a = 15, b = 25$5p

3) $a' = 5, b' = 3$ nu convine.....2p

4) $a' = 15, b' = 1$ nu convine.....2p

PROBLEMA 3.

Se dau unghiurile: AOB, BOC, COD, adiacente două câte două, ale căror măsuri însumate fac 180° . Măsurile lor sunt invers proporționale cu numerele 0,(3); 0,5 și 0,25.

Să se calculeze:

- măsurile unghiurilor AOB, BOC și COD;
- măsura unghiului MON, unde (OM este bisectoarea unghiului AOB și (ON este bisectoarea unghiului COD.
- măsura unghiului MOP, unde $OP \perp ON$.

SOLUȚIE:

a) $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD$ - invers proporționale cu numerele 0,(3); 0,5 și 0,25

$\Rightarrow \sphericalangle AOB \cdot 0, (3) = \sphericalangle BOC \cdot 0,5 = \sphericalangle COD \cdot 0,25$2p

$$\frac{\sphericalangle AOB}{3} = \frac{\sphericalangle BOC}{2} = \frac{\sphericalangle COD}{4} \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{\sphericalangle AOB}{3} = \frac{\sphericalangle BOC}{2} = \frac{\sphericalangle COD}{4} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ \dots\dots\dots 2p$$

$$\sphericalangle AOB = 60^\circ, \sphericalangle BOC = 40^\circ, \sphericalangle COD = 80^\circ \dots\dots\dots 1p$$

b) (OM este bisectoarea $\sphericalangle AOB$ și (ON este bisectoarea $\sphericalangle COD$

$\Rightarrow \sphericalangle MON = \sphericalangle MOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle CON \Rightarrow \sphericalangle MON = 110^\circ$3p

c) Cazul 1. P este în același semiplan cu B față de AD $\Rightarrow \sphericalangle MOP = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ + 40^\circ) \Rightarrow \sphericalangle MOP = 20^\circ$5p

Cazul 2. . P este în semiplanul opus semiplanului format de dreapta AD și punctul B \Rightarrow4p

$$\sphericalangle MOP = 180^\circ - 20^\circ \Rightarrow \sphericalangle MOP = 160^\circ \dots\dots\dots 2p$$

PROBLEMA 4.

Fie $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ puncte coliniare în această ordine, astfel încât $M_1M_2=9$,
 $M_2M_3=17$, $M_3M_4=33$, $M_4M_5=65$, ..., $M_{n-1}M_n$.

- a) Aflați lungimea segmentului M_8M_9 ;
 b) Aflați $n \in \mathbb{N}$ dacă $M_1M_n = 8194$

SOLUȚIE:

a) $M_1M_2 = 9 \Rightarrow M_1M_2 = 2^3+1 \dots\dots\dots 2p$
 $M_2M_3 = 17 \Rightarrow M_2M_3 = 2^4+1 \dots\dots\dots 2p$
 $M_3M_4 = 33 \Rightarrow M_3M_4 = 2^5+1 \dots\dots\dots 2p$
 $M_4M_5 = 65 \Rightarrow M_4M_5 = 2^6+1 \dots\dots\dots 2p$

.....

$M_{n-1}M_n = 2^{n+1}+1 \Rightarrow \dots\dots\dots 3p$
 $M_8M_9 = 2^{10}+1 = 1024+1 = 1025. \dots\dots\dots 1p$

b) $M_1M_n = M_1M_2 + M_2M_3 + M_3M_4 + \dots + M_{n-1}M_n \dots\dots\dots 1p$
 $= 2^3+1+2^4+1+2^5+1+ \dots + 2^{n+1}+1 \dots\dots\dots 1p$
 $= 2^3+2^4+2^5+ \dots + 2^{n+1} + \underbrace{1+1+\dots+1}_{\text{de } n-1 \text{ ori}} \dots\dots\dots 1p$
 $= 2^3(1+2+\dots+2^{n-2}) + n-1 = 2^3(2^{n-1}-1) + n-1 \dots\dots\dots 1p$
 $8 \cdot (2^{n-1}-1) + n-1 = 8 \cdot 2^{n-1} + n-9. \dots\dots\dots 1p$

Dar, $M_1M_n = 8194 \Rightarrow 8 \cdot 2^{n-1} + n-9 = 8194 \Rightarrow 8 \cdot 2^{n-1} + n = 8203 \dots\dots\dots 1p$
 $\Rightarrow 8 \cdot 2^{n-1} < 8203 \quad | :8 \Rightarrow \dots\dots\dots 1p$
 $\Rightarrow 2^{n-1} < 1025 \Rightarrow 2^{n-1} < 2^{10} \Rightarrow n-1 \leq 10 \Rightarrow n \leq 11. \dots\dots\dots 1p$

Pentru $n \leq 10 \Rightarrow 8 \cdot 2^{10-1} + 10 = 8 \cdot 2^9 + 10 = 4096 + 10 = 4106.$

Deci, $n = 11. \dots\dots\dots 1p$

Notă: Timp de lucru – 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu 21puncte.

Se acordă 16 puncte din oficiu.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Orice soluție corectă diferită de cea din barem este punctată corespunzător.