

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
07 februarie 2026

CLASA a IX-a

1. (21p) Demonstrați că, pentru orice număr natural $n \geq 2$, are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) > \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

2. (21p) Pe un cerc se scriu numerele naturale $1, 2, \dots, n$ în această ordine ($n \geq 3$). Se formează toate cele n produse a câte două numere vecine. Să se arate că dacă suma acestor produse se divide cu 5, atunci n se divide cu 5.

3. a) (11p) Demonstrați că $\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$, pentru orice $x, y, z \in (0, \infty)$.

b) (10p) Fie $x, y, z \in (0, \infty)$ cu $x^3 + y^3 + z^3 = 3$. Demonstrați că

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

4. (21p) Se consideră patrulaterul $ABCD$ înscris într-un cerc de centru O . Se notează cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC , BCD , CDA , respectiv DAB și cu M , N mijloacele diagonalelor AC , respectiv BD .

a) Arătați că segmentele DH_1, AH_2, BH_3 și CH_4 au același mijloc.

b) Dacă P și Q sunt mijloacele segmentelor DH_1 , respectiv MN , arătați că punctele O , P și Q sunt coliniare.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Se acordă 16 puncte din oficiu.

3. Timp de lucru 3 ore.