

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA,
7 februarie 2026

CLASA a VIII-a

1) (21) Dacă $x = \sqrt{\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}}$ și $y = \sqrt{\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}}$, atunci:

a) (13p) arătați că numărul $a = x^2 + y^2$ este prim;

b) (8p) calculați numărul $b = x^{10} - x^8 + x^4 + x^2 + y^{10} - y^8 + y^4 + y^2$.

2) a) (10p) Arătați că, pentru orice număr natural nenul n , are loc egalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)} \cdot (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

b) (11p) Determinați partea întreagă a numărului a , unde:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{1} + \sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{6} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025 \cdot 2026} \cdot (\sqrt{2025} + \sqrt{2026})}.$$

3) (21) În tetraedrul $ABCD$ notăm cu M, N, P, Q mijloacele muchiilor AD, AB, BC , respectiv CD . Se știe că măsura unghiului format de dreptele AC și BD este de 90° .

a) (11p) Arătați că măsura unghiului MNP este de 90° .

b) (10p) Arătați că, dacă $AC = BD$, atunci $MNPQ$ este pătrat.

4) (21) Se consideră prisma dreaptă $ABCD A'B'C'D'$, cu baza pătratul $ABCD$. Punctul Q este centrul feței $BCC'B'$, iar P și N sunt mijloacele muchiilor AB , respectiv BC .

a) (11p) Determinați măsura unghiului dintre dreptele CP și DN .

b) (10p) Dacă M este punctul de intersecție al dreptelor CP și DN , demonstrați că dreptele QM și CP sunt perpendiculare.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Se acordă 16 puncte din oficiu.

3. Timp de lucru 3 ore.