

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 7 FEBRUARIE 2026
CLASA a XII-a

H2

Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii

1. (20p) Pe mulțimea $G = [k, +\infty)$, $k \in \mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție

$$x * y = 3xy - 3k(x + y) + k(3k + 1), \forall x, y \in G.$$

a) (10p) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă și admite element neutru.

b) (10p) Pentru $k = 2$ să se rezolve ecuația $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 2026 ori}} = 2$.

2. (20p) Se consideră funcția: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

a) (10p) Să se arate că funcția f verifică relația $(e^{-x} \cdot f(x))' = f'(x) \cdot e^{-x} - f(x) \cdot e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) (10p) Să se determine primitiva G a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x) - f'(x)}{e^x}$, cu proprietatea

$$G(0) = 2026.$$

3. (20p) Se consideră funcțiile: $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} - 1$ și $g(x) = \frac{f(x)}{2 \cdot e^x}$

a) (10p) Să se arate că $\int_0^1 x \left[f\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right] dx = 1$;

b) (5p) Să se calculeze $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{g(x)} dx$;

c) (5p) Să se demonstreze că $\int_{-2026}^{2026} \frac{f(x)}{e^{2x} + 1} dx = 0$

4. (30p) Pe mulțimea \mathbb{N} se consideră legea de compoziție $x \circ y = u_c(xy)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{N}$

(unde $u_c(a)$ reprezintă ultima cifră a numărului natural a).

a) (10p) Dacă $G = \{1, 3, 7, 9\}$, arătați că G este parte stabilă a lui \mathbb{N} în raport cu legea „ \circ ”.

b) (20p) Demonstrați că (G, \circ) este grup abelian.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Se acordă 10 puncte din oficiu.

3. Timp de lucru 3 ore.