

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA - 7 FEBRUARIE 2026

CLASA a XII-a

H1

Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

1. (20p) Pe \mathbb{R} se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - a(x + y) + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) **(10p)** Determinați a astfel ca $M = [a, +\infty)$ să fie parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea " \circ ".

b) **(10p)** Pentru $a = -2$ determinați $t \in M$ pentru care $t \circ t \circ t \circ t = 2(8 \cdot 1012^4 - 1)$.

2. (20p) Fie mulțimea $G = (0; 1)$ și legea de compoziție " $*$ " definită prin $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$,
oricare ar fi $x, y \in G$.

a) **(6p)** Rezolvați în G ecuația $x * \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$.

b) **(7p)** Verificați dacă $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție " $*$ ".

c) **(7p)** Determinați simetricul lui $\frac{1}{2026}$ în raport cu legea de compoziție " $*$ ".

3. (20p) Se consideră funcția $f : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) **(7p)** Arătați că funcția $F : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$ este o primitivă a funcției f .

b) **(7p)** Calculați $\int_1^e \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) f(x) dx$.

c) **(6p)** Să se determine primitiva funcției f , al cărei grafic conține punctul $A(e^{-2}; e^{-1})$.

4. (30p) Apa unui lac contaminat este tratată cu un bactericid. Rata modificării numărului bacteriilor dăunătoare după t zile de la aplicarea tratamentului este modelată prin $B'(t) = -\frac{3000}{(1 + 0.2t)^2}$, $t \geq 0$, unde

B este numărul bacteriilor pe milimetru de apă și t este numărul de zile de tratament al apei. Numărul inițial al bacteriilor a fost egal cu 10000/mililitru.

Determinați după câte zile numărul bacteriilor va fi cel mult egal cu 2500/mililitru.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii;

2. Se acordă 10 puncte din oficiu

3. Timp de lucru 3 ore