

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ**  
**SUCEAVA**  
**7 februarie 2026**  
**CLASA a XI-a**

1. (21p) Se consideră matricea  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

a) (5p) Arătați că  $A^2 - 5A + 4I_3 = O_3$ .

b) (8p) Demonstrați că  $A$  este matrice inversabilă și determinați  $A^{-1}$ .

c) (8p) Rezolvați în  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ecuația  $AXA = I_3$ .

2. (21p) Pentru o matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  notăm  $\delta = \det(A)$  și  $t = \text{Tr}(A)$ .

a) (11p) Arătați că  $\det(A^2 + \delta I_2) = t^2 \delta$ .

b) (10p) Arătați că  $\det(A^2 + A - \delta I_2) + \det(A^2 + \delta I_2) = 4\delta^2 + \delta$ .

3. (21p) Fie  $a \in [1, \infty)$  și  $b \in [3, \infty)$ . Se consideră șirul de numere reale  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit prin

$x_1 = a$  și  $x_{n+1} = x_n + b\sqrt{x_n} + \sqrt{\frac{n}{x_n}}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a) (11p) Demonstrați că  $x_n \geq n^2$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

b) (10p) Arătați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2} = \frac{b^2}{4}$ .

4. (21p) Determinați toate funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care verifică simultan condițiile:

i)  $f(x) \geq x + 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ;

ii)  $f(2x) \geq (f(x))^2$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ;

iii)  $f(x) \cdot f(-x) \leq 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Se consideră cunoscut faptul că  $e^x \geq x + 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

**Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.**

**2. Se acordă 16 puncte din oficiu.**

**3. Timp de lucru 3 ore.**