

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 7 februarie 2026
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a IX-a

1. (21p) Demonstrați că, pentru orice număr natural $n \geq 2$, are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) > \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

Soluție și barem:

Demonstrăm prin metoda inducției matematice propoziția

$$P(n): 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} > \frac{n+1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right), n \geq 2$$

Pentru $n=2$ obținem $P(2): 1 + \frac{1}{3} > \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \Leftrightarrow \frac{4}{3} > \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{4}{3} > \frac{9}{8}$, adevărat.....**5 puncte**

Presupunem $P(n)$ adevărată și demonstrăm $P(n+1)$ adevărată, pentru $n \geq 2$.

Avem $P(n+1): 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1} > \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n+2} \right)$. Din $P(n)$ adevărată rezultă

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1} > \frac{n+1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) + \frac{1}{2n+1} \dots\dots\dots**5 puncte**$$

Este suficient să demonstrăm că $\frac{n+1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) + \frac{1}{2n+1} > \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n+2} \right)$,

inegalitate echivalentă cu $\frac{n+1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) - \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) > \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) > \frac{n}{2(2n+1)(n+1)^2} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{n^2}{(2n+1)(n+1)}, \text{ adevărat.}$$

Conform principiului inducției matematice complete rezultă că $P(n)$ este adevărată, pentru orice număr natural $n \geq 2$

.....**11 puncte**

2. (21p) Pe un cerc se scriu numerele naturale $1, 2, \dots, n$ în această ordine ($n \geq 3$). Se formează toate cele n produse a câte două numere vecine. Să se arate că dacă suma acestor produse se divide cu 5, atunci n se divide cu 5.

Anca Andrei, Suceava

Soluție și barem:

$$\text{Fie } S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n + n \cdot 1 = \sum_{k=2}^n (k-1)k + n = \sum_{k=2}^n k^2 - \sum_{k=2}^n k + n \Rightarrow$$

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n^2+2)}{3} \dots\dots\dots**9 puncte**$$

Din ipoteză $5/S \Rightarrow \frac{n(n^2+2)}{3} = 5k, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n(n^2+2) = 3 \cdot 5 \cdot k \Rightarrow 5/n$ sau $5/(n^2+2)$.

.....3 puncte
Arătăm că nu este posibil ca 5 să dividă pe n^2+2 .

Dacă $n=5p, p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n^2+2=25p^2+2$ și deci 5 nu divide pe n^2+2 .

Dacă $n=5p \pm 1, p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n^2+2=25p^2 \pm 10p + 3$ și deci 5 nu divide pe n^2+2 .

Dacă $n=5p \pm 2, p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n^2+2=25p^2 \pm 20p + 6$ și deci 5 nu divide pe n^2+2 .

.....9 puncte

3. a) (11p) Demonstrați că $\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y} \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$, pentru orice $x, y, z \in (0, \infty)$.

b) (10p) Fie $x, y, z \in (0, \infty)$ cu $x^3+y^3+z^3=3$. Demonstrați că

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

Ion Bursuc, Suceava

Soluție și barem:

a) Folosind inegalitatea lui C.B.S în forma lui Bergstrom, adică inegalitatea

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}, a, b, c \in (0, \infty), \text{ obținem:}$$

$$\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y} = \frac{(x^2)^2}{xy+xz} + \frac{(y^2)^2}{yz+xy} + \frac{(z^2)^2}{zx+zy} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{2xy+2yz+2zx} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{2x^2+2y^2+2z^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$$

.....11 puncte

b) Folosim inegalitatea de la punctul precedent $\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y} \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$ și inegalitățile

$$\text{asemănătoare } \frac{x^3}{x+y} + \frac{y^3}{y+z} + \frac{z^3}{z+x} = \frac{(x^2)^2}{x^2+xy} + \frac{(y^2)^2}{y^2+yz} + \frac{(z^2)^2}{z^2+zx} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx} \geq$$

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{2x^2+2y^2+2z^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2} \Rightarrow \frac{x^3}{x+y} + \frac{y^3}{y+z} + \frac{z^3}{z+x} \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{2} \text{ și}$$

$$\frac{x^3}{x+z} + \frac{y^3}{y+x} + \frac{z^3}{z+y} \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$$

.....5 puncte

Adunând cele trei inegalități se obține:

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{y+z} + \frac{x^3+y^3+z^3}{z+x} + \frac{x^3+y^3+z^3}{x+y} \geq \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$$

..... 5 puncte

4. Se consideră patrulaterul $ABCD$ înscris într-un cerc de centru O . Se notează cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDA , respectiv DAB și cu M, N mijloacele diagonalelor AC , respectiv BD .

(11p) a) Arătați că segmentele DH_1, AH_2, BH_3 și CH_4 au același mijloc.

(10p) b) Dacă P și Q sunt mijloacele segmentelor DH_1 , respectiv MN , arătați că punctele O, P și Q sunt coliniare.

Supliment Gazeta Matematică 11/2025

Soluție și barem:

a) Deoarece triunghiurile ABC, BCD, CDA, respectiv DAB sunt înscrise în același cerc de centru O, din relația lui Sylvester avem $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ **7 puncte**

Obținem $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH_2} + \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH_3} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH_4} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$,

de unde rezultă că segmentele DH_1, AH_2, BH_3 și CH_4 au același mijloc.....**4 puncte**

b) Dacă P și Q sunt mijloacele segmentelor DH_1 , respectiv MN, atunci

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ **4 puncte**

și $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})\right) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ **4 puncte**

Deducem că $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OQ}$, deci punctele O, P și Q sunt coliniare.....**2 puncte**

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.