

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 7 FEBRUARIE 2026
CLASA a IX-a

H1

Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. (20p) Fie mulțimea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x + 2y = 3 \text{ și } |x| - 3|y| = -5\}$.

a) (10p) Verificați dacă $(-5, 4) \in A$.

b) (10p) Determinați S suma soluțiilor lui x .

Propunător, prof. Niculina – Mihaela Moisuc, Rădăuți

Barem:

a)	$\begin{cases} -5 + 2 \cdot 4 = 3 \\ -5 - 3 4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 3(A) \\ -7 = -5(F) \end{cases} \Rightarrow (-5, 4) \notin A$	10p
b)	$x > 0, y > 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$ nu verifică, $y = \frac{8}{5}$	2p
	$x < 0, y < 0 \Rightarrow x = \frac{19}{5}$ nu verifică, $y = -\frac{2}{5}$	2p
	$x > 0, y < 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 19 \\ y = -8 \end{cases}$ soluții acceptate	2p
	$x < 0, y > 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ soluții acceptate	2p
	$S = -1 + 19 = 18$	2p

2. (20p) Se consideră egalitatea: $\left[\sqrt{n^2 + 2n + 2} \right] = n + 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $[x]$ – reprezintă partea întreagă a numărului real x .

a) (5p) Verificați egalitatea pentru $n \in \{1, 2, 3\}$

b) (15p) Calculați $\left[\sqrt{2070A} \right]$, unde $A = \frac{1}{\left[\sqrt{5} \right]} + \frac{1}{2\left[\sqrt{10} \right]} + \frac{1}{3\left[\sqrt{17} \right]} + \dots + \frac{1}{44\left[\sqrt{2026} \right]}$.

Propunător, prof. Mihaela Ghelbere – Câmpulung Moldovenesc

Barem:

a) $\left[\sqrt{1^2 + 2 \cdot 1 + 2} \right] = 2, \left[\sqrt{2^2 + 2 \cdot 2 + 2} \right] = 3$	3p
$\left[\sqrt{3^2 + 2 \cdot 3 + 2} \right] = 4$	2p
b) $\left[\sqrt{5} \right] = 2, \left[\sqrt{10} \right] = 3, \dots, \left[\sqrt{2026} \right] = 45.$	5p
$A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{44 \cdot 45} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{44} - \frac{1}{45} = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}$	5p
$\sqrt{2070A} = \sqrt{2070 \cdot \frac{44}{45}} = \sqrt{46 \cdot 44} = \sqrt{45^2 - 1} < 45$	2p
$\sqrt{2070A} = \sqrt{44 \cdot 46} > 44.$	2p
$\left[\sqrt{2070A} \right] = 44.$	1p

3. (20p) Fie paralelogramul $ABCD$. Notăm cu O punctul de intersecție al diagonalelor. Se consideră punctele M și N astfel încât $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$, $M \in AB$ și $\overrightarrow{CN} = \alpha \overrightarrow{CD}$, $N \in CD$, iar $\alpha \in (0,1)$.

a) (10p) Demonstrați că: $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$.

b) (10p) Demonstrați că pentru orice punct P din planul paralelogramului sau din afara lui este adevărată relația: $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{PO}$ și apoi deduceți poziția geometrică a punctului O față de segmentul MN .

Propunător, prof. Claudia Chirilă – Fălticeni

Barem:

a) (10p) Soluție: a) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{AB}$	2p
$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{OC} + \alpha \overrightarrow{CD}$	2p
$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \alpha (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$, dar $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$	4p
$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}.$	2p
b) i) $P \in (ABCD)$, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}$	1p
$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{ON}$	1p
$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{ON}) = 2\overrightarrow{PO} + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})$	2p
Din a) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$. Rezultă că: $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{PO}$	1p

ii) $P \notin (ABCD)$, rezolvarea idem i)	3p
iii) Din a) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{ON}$, \overrightarrow{OM} și \overrightarrow{ON} au aceeași direcție, lungime, dar sens opus Deci, O mijlocul segmentului $[MN]$	2p

4. (30p)) Într-un studiu privind evoluția producției a doua fabrici, se analizează cantitatea de produse realizată în decursul mai multor ani:

- Fabrica **A** își triplează producția în fiecare an. În primul an produce 3 unități, în al doilea an 3^2 unități, și așa mai departe, până în anul 2026. Producția totală a fabricii **A** este:

$$A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2026}.$$

- Fabrica **B** își multiplică producția de 4 ori în fiecare an. În primul an produce 4 unități, în al doilea an 4^2 unități, și așa mai departe, până în anul 2026. Producția totală a fabricii **B** este:

$$B = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{2026}.$$

- a) (15p) Determinați cifra unităților producției totale realizate de cele doua fabrici, adică cifra unităților numărului $B + A$.
- b) (15p) Justificați că producția totală realizată de cele două fabrici depășește 10^{1000} .

*Propunători: prof. Pogorevici Aura-Loreta – Fălticeni
și prof. Cărmidă Elena Daniela – Fălticeni,
Adaptată de prof. Claudia Chirilă – Fălticeni*

Soluție și barem

- a) Cifra unităților puterilor lui 3 se repetă din 4 în 4 și anume:

3^{4n+1} are cifra unităților 3

3^{4n+2} are cifra unităților 9

3^{4n+3} are cifra unităților 7

3^{4n+4} are cifra unităților 1.....3 p

Cifra unităților unei sume de forma $S = 3^{4n+1} + 3^{4n+2} + 3^{4n+3} + 3^{4n+4}$ ($n \in \mathbb{N}$) coincide cu cifra unităților sumei $3+9+7+1$, deci este 0.

$$2026 : 4 = 506, \text{ rest } 2$$

Termenii lui A pot fi grupați în 506 grupe de forma S , rămânând doi termeni la final $3^{2025} + 3^{2026}$, rezultă că cifra unităților numărului A coincide cu cifra unităților numărului

$$506 \cdot 0 + 3 + 9 = 0 + 3 + 9 = 12 \Rightarrow \text{cifra unităților numărului } A \text{ este } 2 \dots \dots \dots 3 \text{ p}$$

- Cifra unităților puterilor lui 4 se repetă din 2 în 2, și anume:

4^{2n+1} are cifra unităților 4

4^{2n+2} are cifra unităților 6.....3 p

Cifra unităților unei sume de forma $S' = 4^{2n+1} + 4^{2n+2}$ este 0.

Termenii lui B pot fi grupați în 1013 grupe de forma S' rezultă că cifra unităților

numărului B este 0.....3 p

Deci cifra unităților lui $A + B$ este 2.3 p

b) $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2026} > 3^{2026}$ 2p

$B = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{2026} > 4^{2026}$ 2p

$B + A > 4^{2026} + 3^{2026} > 4^{2026} = (2^2)^{2026} = 2^{4052}$ 4p

Știm că: $2^{10} = 1024 > 10^3$ 2p

$2^{4052} = 2^2 \cdot (2^{10})^{405} > (10^3)^{405} = 10^{1215} > 10^{1000}$ 4p

Deci, $B + A > 10^{1000}$ 1p