

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 7 februarie 2026
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VIII-a

1) (21p) Dacă $x = \sqrt{\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}}$ și $y = \sqrt{\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}}$, atunci:

a) **(13p)** arătați că numărul $a = x^2 + y^2$ este prim;

b) **(8p)** calculați numărul $b = x^{10} - x^8 + x^4 + x^2 + y^{10} - y^8 + y^4 + y^2$.

Supliment Gazeta Matematică Nr.11/2025 (text modificat)

Soluție.

a) $x^2 = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{10 + 2\sqrt{21}}{4} = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$. Analog, obținem $y^2 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$.

Atunci $a = x^2 + y^2 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} + \frac{5 - \sqrt{21}}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$ număr prim.

b) $x^4 = (x^2)^2 = \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^2 = \frac{46 + 10\sqrt{21}}{4} = \frac{23 + 5\sqrt{21}}{2}$. Analog, obținem $y^4 = \frac{23 - 5\sqrt{21}}{2}$.

$x^8 = (x^4)^2 = \left(\frac{23 + 5\sqrt{21}}{2}\right)^2 = \frac{1054 + 230\sqrt{21}}{4} = \frac{527 + 115\sqrt{21}}{2}$. Analog, obținem $y^8 = \frac{527 - 115\sqrt{21}}{2}$

$x^{10} = x^2 \cdot x^8 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \cdot \frac{527 + 115\sqrt{21}}{2} = \frac{2525 + 551\sqrt{21}}{2}$. Analog, obținem $y^{10} = \frac{2525 - 551\sqrt{21}}{2}$.

$b = (x^{10} + y^{10}) - (x^8 + y^8) + (x^4 + y^4) + (x^2 + y^2) = \frac{2 \cdot 2525}{2} - \frac{2 \cdot 527}{2} + \frac{2 \cdot 23}{2} + 5 =$
 $= 2525 - 527 + 23 + 5 = 2026$

Barem.

a) $x^2 = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{10 + 2\sqrt{21}}{4} = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$	8p
Analog, obținem $y^2 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$.	2p
$a = x^2 + y^2 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} + \frac{5 - \sqrt{21}}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$ număr prim.	3p
b) $x^4 = (x^2)^2 = \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^2 = \frac{46 + 10\sqrt{21}}{4} = \frac{23 + 5\sqrt{21}}{2}$. Analog $\Rightarrow y^4 = \frac{23 - 5\sqrt{21}}{2}$	2p
$x^8 = (x^4)^2 = \left(\frac{23 + 5\sqrt{21}}{2}\right)^2 = \frac{1054 + 230\sqrt{21}}{4} = \frac{527 + 115\sqrt{21}}{2}$. Analog $\Rightarrow y^8 = \frac{527 - 115\sqrt{21}}{2}$	2p
$x^{10} = x^2 \cdot x^8 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \cdot \frac{527 + 115\sqrt{21}}{2} = \frac{2525 + 551\sqrt{21}}{2}$ Analog $\Rightarrow y^{10} = \frac{2525 - 551\sqrt{21}}{2}$	2p

$b = (x^{10} + y^{10}) - (x^8 + y^8) + (x^4 + y^4) + (x^2 + y^2) = \frac{2 \cdot 2525}{2} - \frac{2 \cdot 527}{2} + \frac{2 \cdot 23}{2} + 5 =$ $= 2525 - 527 + 23 + 5 = 2026.$	2p
---	-----------

2) a) (10p) Arătați că, pentru orice număr natural nenul n are loc egalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)} \cdot (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

b) (11p) Determinați partea întreagă a numărului a , unde:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{1} + \sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{6} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025 \cdot 2026} \cdot (\sqrt{2025} + \sqrt{2026})}$$

Soluție.

a) Pentru orice număr natural nenul n avem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)} \cdot (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)} \cdot (n+1-n)} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

b) Folosind punctul a) pentru $n \in \{1, 2, 3, \dots, 2025\}$, obținem egalitățile: $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2} \cdot (\sqrt{1} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}},$

$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2025 \cdot 2026} \cdot (\sqrt{2025} + \sqrt{2026})} = \frac{1}{\sqrt{2025}} - \frac{1}{\sqrt{2026}}.$$

Adunând aceste egalități obținem $a = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2026}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2026}}.$

Cum $0 < \frac{1}{\sqrt{2026}} < 1 \Big|_{(-1)} \Leftrightarrow -1 < -\frac{1}{\sqrt{2026}} < 0 \Big|_{+1} \Leftrightarrow 0 < 1 - \frac{1}{\sqrt{2026}} < 1 \Leftrightarrow 0 < a < 1 \Rightarrow$ partea întreagă a numărului a este 0.

Barem.

a)	$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)} \cdot (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)} \cdot (n+1-n)} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} =$	5p
	$= \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$	5p
b)	<p>Folosind punctul a) pentru $n \in \{1, 2, 3, \dots, 2025\}$ obținem egalitățile:</p> $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2} \cdot (\sqrt{1} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots,$ $\frac{1}{\sqrt{2025 \cdot 2026} \cdot (\sqrt{2025} + \sqrt{2026})} = \frac{1}{\sqrt{2025}} - \frac{1}{\sqrt{2026}}.$	4p
	Adunând aceste egalități obținem $a = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2026}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2026}}.$	3p

Cum $0 < \frac{1}{\sqrt{2026}} < 1 \Big _{(-1)} \Leftrightarrow -1 < -\frac{1}{\sqrt{2026}} < 0 \Big _{+1} \Leftrightarrow 0 < 1 - \frac{1}{\sqrt{2026}} < 1 \Leftrightarrow 0 < a < 1$	3p
\Rightarrow partea întreagă a numărului a este 0.	1p

3) (21p) În tetraedrul $ABCD$ notăm cu M, N, P, Q mijloacele muchiilor AD, AB, BC , respectiv CD . Se știe că măsura unghiului format de dreptele AC și BD este de 90° .

a) **(11p)** Arătați că măsura unghiului MNP este de 90° .

b) **(10p)** Arătați că, dacă $AC = BD$, atunci $MNPQ$ este pătrat.

Supliment Gazeta Matematică Nr.10/2025

Soluție.

a) În $\triangle ABD$ avem: M mijloc AD și N mijloc $AB \Rightarrow MN$ linie mijlocie $\Rightarrow MN \parallel BD$ și $MN = \frac{BD}{2}$.

În $\triangle ABC$ avem: P mijloc BC și N mijloc $AB \Rightarrow PN$ linie mijlocie $\Rightarrow PN \parallel AC$ și $PN = \frac{AC}{2}$.

Din $MN \parallel BD$ și $PN \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle(AC, BD) = \sphericalangle(PN, MN) = \sphericalangle PNM$. Dar, din ipoteză, avem $\sphericalangle(AC, BD) = 90^\circ$ și atunci obținem $\sphericalangle PNM = 90^\circ$.

b) În $\triangle BCD$ avem: P mijloc BC și Q mijloc $CD \Rightarrow PQ$ linie mijlocie $\Rightarrow PQ \parallel BD$ și $PQ = \frac{BD}{2}$.

Din $MN \parallel BD$ și $PQ \parallel BD \Rightarrow MN \parallel PQ$. Dar, $MN = PQ = \frac{BD}{2}$ și obținem $MNPQ$ paralelogram.

Din $MNPQ$ paralelogram și $\sphericalangle PNM = 90^\circ$ obținem $MNPQ$ dreptunghi.

Din $AC = BD$ și $MN = \frac{BD}{2} \Rightarrow MN = \frac{AC}{2}$. Dar, $PN = \frac{AC}{2}$ și obținem $MN = NP$.

Din $MNPQ$ dreptunghi și $MN = NP$ obținem $MNPQ$ pătrat.

Barem.

a) Figura	2p
În $\triangle ABD$ avem M mijloc AD și N mijloc $AB \Rightarrow MN$ linie mijlocie $\Rightarrow MN \parallel BD$ și $MN = \frac{BD}{2}$.	2p
În $\triangle ABC$ avem P mijloc BC și N mijloc $AB \Rightarrow PN$ linie mijlocie $\Rightarrow PN \parallel AC$ și $PN = \frac{AC}{2}$.	2p
Din $MN \parallel BD$ și $PN \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle(AC, BD) = \sphericalangle(PN, MN) = \sphericalangle PNM$. Dar, din ipoteză avem $\sphericalangle(AC, BD) = 90^\circ$ și atunci obținem $\sphericalangle PNM = 90^\circ$.	5p
b) În $\triangle BCD$ avem P mijloc BC și Q mijloc $CD \Rightarrow PQ$ linie mijlocie $\Rightarrow PQ \parallel BD$ și $PQ = \frac{BD}{2}$.	2p
Din $MN \parallel BD$ și $PQ \parallel BD \Rightarrow MN \parallel PQ$. Dar, $MN = PQ = \frac{BD}{2}$ și obținem $MNPQ$ paralelogram.	3p
Din $MNPQ$ paralelogram și $\sphericalangle PNM = 90^\circ$ obținem $MNPQ$ dreptunghi.	2p
Din $AC = BD$ și $MN = \frac{BD}{2} \Rightarrow MN = \frac{AC}{2}$. Dar, $PN = \frac{AC}{2}$ și obținem $MN = NP$.	2p
Din $MNPQ$ dreptunghi și $MN = NP$ obținem $MNPQ$ pătrat.	1p

4) (21p) Se consideră prisma dreaptă $ABCD A' B' C' D'$, cu baza pătratul $ABCD$. Punctul Q este centrul feței $BCC' B'$, iar P și N sunt mijloacele muchiilor AB , respectiv BC .

a) **(11p)** Determinați măsura unghiului dintre dreptele CP și DN .

b) **(10p)** Dacă M este punctul de intersecție al dreptelor CP și DN , demonstrați că dreptele QM și CP sunt perpendiculare.

Soluție.

a) $ABCD A' B' C' D'$ este prismă patrulateră regulată \Rightarrow bazele sunt pătrate congruente între ele și fețele laterale sunt dreptunghiuri congruente între ele \Rightarrow muchia bazei $a > 0$ și muchia laterală $b > 0$.

Comparând triunghiurile dreptunghice PBC și NCD avem:

$PB \equiv NC \left(= \frac{a}{2} \right)$ și $BC \equiv CD (= a)$, iar de aici, conform

cazului C.C., obținem $\triangle PBC \equiv \triangle NCD \Rightarrow \angle BCP \equiv \angle CDN$.

Cum $\angle BCD = 90^\circ \Rightarrow \angle BCP + \angle PCD = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CDN + \angle PCD = 90^\circ \Rightarrow \angle CDM + \angle MCD = 90^\circ$.

Atunci, din triunghiul DCM obținem:

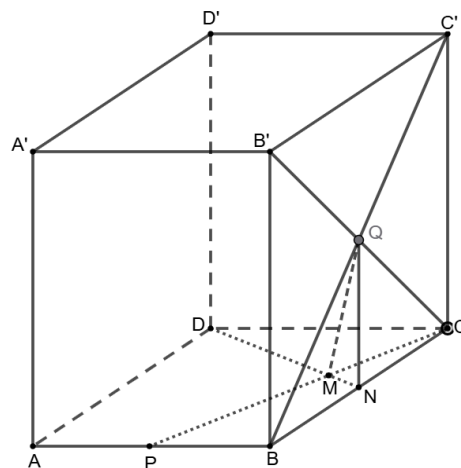
$\angle DMC = 180^\circ - (\angle CDM + \angle MCD) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow DM \perp MC \Rightarrow DN \perp PC \Rightarrow \angle(DN, PC) = 90^\circ$.

b) Q este centrul dreptunghiului $BCC' B' \Rightarrow Q$ mijloc BC' și $B'C$.

În $\triangle B'BC$ avem: N mijloc BC și Q mijloc $B'C \Rightarrow QN$ linie mijlocie $\Rightarrow QN \parallel BB'$. Dar, $BB' \perp (ABC)$ și obținem $QN \perp (ABC)$.

Din $QN \perp (ABC)$, $NM \perp CP$, $NM \cap CP = \{M\}$, $NM, CP \subset (ABC)$, obținem conform teoremei celor trei perpendiculare că: $QM \perp CP$.



Barem.

a) Figura	2p
$ABCD A' B' C' D'$ este prismă patrulateră regulată \Rightarrow bazele sunt pătrate congruente între ele și fețele laterale sunt dreptunghiuri congruente între ele \Rightarrow muchia bazei $a > 0$ și muchia laterală $b > 0$.	5p
Comparând triunghiurile dreptunghice PBC și NCD avem: $PB \equiv NC \left(= \frac{a}{2} \right)$ și $BC \equiv CD (= a)$, iar de aici, conform cazului C.C. obținem $\triangle PBC \equiv \triangle NCD \Rightarrow \angle BCP \equiv \angle CDN$	
Cum $\angle BCD = 90^\circ \Rightarrow \angle BCP + \angle PCD = 90^\circ \Rightarrow \angle CDN + \angle PCD = 90^\circ \Rightarrow \angle CDM + \angle MCD = 90^\circ$. Atunci, din triunghiul DCM obținem: $\angle DMC = 180^\circ - (\angle CDM + \angle MCD) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow DM \perp MC \Rightarrow DN \perp PC \Rightarrow \angle(DN, PC) = 90^\circ$.	4p
b) Q este centrul dreptunghiului $BCC' B' \Rightarrow Q$ mijloc BC' și $B'C$.	3p
În $\triangle B'BC$ avem: N mijloc BC și Q mijloc $B'C \Rightarrow QN$ linie mijlocie $\Rightarrow QN \parallel BB'$.	
Din $BB' \perp (ABC)$ și $QN \parallel BB'$ obținem $QN \perp (ABC)$.	3p
Din $QN \perp (ABC)$, $NM \perp CP$, $NM \cap CP = \{M\}$, $NM, CP \subset (ABC)$, obținem conform teoremei celor trei perpendiculare că: $QM \perp CP$.	4p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.