

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ**  
**SUCEAVA, 7 februarie 2026**  
**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**  
**CLASA a VII-a**

1. a) (6p) Arătați că, pentru orice număr natural nenul  $n$ , are loc egalitatea:

$$\frac{1}{n \cdot (n+4)} = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right).$$

b) (15p) Aflați partea întreagă a numărului real  $x - \frac{1}{4}$ , unde  $x = \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{97 \cdot 101}$ .

*Tamara Brutaru, Suceava*

**Soluție.**

a) Pentru orice număr natural nenul  $n$  avem:

$$\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{n+4-n}{n \cdot (n+4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{n \cdot (n+4)} = \frac{1}{n \cdot (n+4)}.$$

**Sau:**  $\frac{1}{n \cdot (n+4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{n+4-n}{n \cdot (n+4)} = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{n+4}{n \cdot (n+4)} - \frac{n}{n \cdot (n+4)} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right).$

Deci,  $\frac{1}{n \cdot (n+4)} = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right)$  este adevărată pentru orice număr natural nenul  $n$ .

b) Aplicând punctul a) avem:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) + \dots + \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{97} - \frac{1}{101} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{101} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{101} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{101-1}{101} = \frac{1}{4} \cdot \frac{100}{101} = \frac{25}{101}. \end{aligned}$$

Atunci  $x - \frac{1}{4} = \frac{25}{101} - \frac{1}{4} = \frac{100-101}{404} = -\frac{1}{404}.$

Cum  $-1 < -\frac{1}{404} < 0$ , partea întreagă a numărului  $x - \frac{1}{4}$  este  $-1$ .

**Barem.**

a) $\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{n+4}{n(n+4)} - \frac{n}{n(n+4)} \right) =$	3p
$= \frac{1}{4} \cdot \frac{n+4-n}{n \cdot (n+4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{n \cdot (n+4)} = \frac{1}{n \cdot (n+4)}.$ Deci, $\frac{1}{n \cdot (n+4)} = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul $n$ .	3p
b) Aplicând punctul a) avem: $x = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) + \dots + \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{97} - \frac{1}{101} \right) =$	4p
$= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{101} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{101} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{101-1}{101} = \frac{1}{4} \cdot \frac{100}{101} = \frac{25}{101}.$	5p
Atunci $x - \frac{1}{4} = \frac{25}{101} - \frac{1}{4} = \frac{100-101}{404} = -\frac{1}{404}.$	3p

Cum  $-1 < -\frac{1}{404} < 0$ , partea întreagă a numărului  $x - \frac{1}{4}$  este  $-1$ .

3p

**2. (21p)** În rombul  $ABCD$ , cu  $AC \cap BD = \{O\}$ , punctele  $E$  și  $F$  sunt mijloacele laturilor  $AD$ , respectiv  $AB$ , iar  $H$  este un punct pe dreapta  $CD$  astfel încât  $EH \parallel AC$ . Arătați că:

a) (11p) patrulaterul  $BDEF$  este trapez isoscel;

b) (10p) punctele  $F, O, H$  sunt coliniare.

Supliment Gazeta Matematică Nr.10/2025

**Soluție.**

a)  $ABCD$  romb  $\Rightarrow AB = BC = CD = DA$ .

$E$  mijloc  $AD \Rightarrow AE = ED = \frac{AD}{2}$

$F$  mijloc  $AB \Rightarrow AF = FB = \frac{AB}{2}$

Atunci,  $ED = FB \left( = \frac{AD}{2} = \frac{AB}{2} \right)$ .

În  $\triangle ABD$  avem:  $E$  mijloc  $AD$  și  $F$  mijloc  $AB \Rightarrow EF$  linie mijlocie  $\Rightarrow EF \parallel BD$ . Dar  $FB \cap ED = \{A\}$  și  $ED = FB \Rightarrow BDEF$  trapez isoscel.

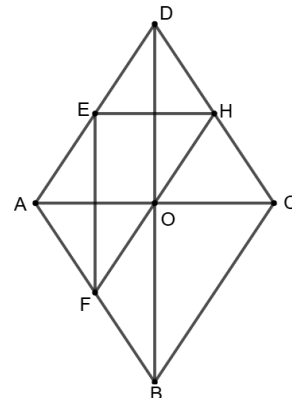
b)  $ABCD$  romb cu  $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow O$  mijloc  $AC$  și  $BD$ .

În  $\triangle ABC$  avem:  $O$  mijloc  $AC$  și  $F$  mijloc  $AB \Rightarrow OF$  linie mijlocie  $\Rightarrow OF \parallel BC$ .

În  $\triangle ADC$  avem:  $E$  mijloc  $AD$ ,  $EH \parallel AC$  și  $H \in DC \Rightarrow EH$  linie mijlocie  $\Rightarrow H$  mijloc  $DC$ .

În  $\triangle DBC$  avem:  $O$  mijloc  $AC$  și  $H$  mijloc  $DC \Rightarrow OH$  linie mijlocie  $\Rightarrow OH \parallel BC$ .

Din  $OF \parallel BC$ ,  $OH \parallel BC$  și  $O \notin BC \Rightarrow$  punctele  $F, O, H$  coliniare.



**Barem.**

a) Figura	1p
$ABCD$ romb $\Rightarrow AB = BC = CD = DA$ . $E$ mijloc $AD \Rightarrow AE = ED = \frac{AD}{2}$ $F$ mijloc $AB \Rightarrow AF = FB = \frac{AB}{2}$ Atunci, $ED = FB \left( = \frac{AD}{2} = \frac{AB}{2} \right)$ .	4p
În $\triangle ABD$ avem: $E$ mijloc $AD$ și $F$ mijloc $AB \Rightarrow EF$ linie mijlocie $\Rightarrow EF \parallel BD$ .	3p
Din $EF \parallel BD$ , $FB \cap ED = \{A\}$ și $ED = FB \Rightarrow BDEF$ trapez isoscel.	3p
b) $ABCD$ romb cu $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow O$ mijloc $AC$ și $BD$ .	1p
În $\triangle ABC$ avem: $O$ mijloc $AC$ și $F$ mijloc $AB \Rightarrow OF$ linie mijlocie $\Rightarrow OF \parallel BC$ .	2p
În $\triangle ADC$ avem: $E$ mijloc $AD$ , $EH \parallel AC$ și $H \in DC \Rightarrow EH$ linie mijlocie $\Rightarrow H$ mijloc $DC$ .	3p
În $\triangle DBC$ avem: $O$ mijloc $AC$ și $H$ mijloc $DC \Rightarrow OH$ linie mijlocie $\Rightarrow OH \parallel BC$ .	2p
Din $OF \parallel BC$ , $OH \parallel BC$ și $O \notin BC \Rightarrow$ punctele $F, O, H$ coliniare.	2p

**3. (21p)** Se consideră numărul real:

$$a = \sqrt{7} + \sqrt{7^2} + \sqrt{7^3} + \dots + \sqrt{7^{2025}}.$$

Știind că numărul  $b = 7\sqrt{7} + \frac{42a}{1+\sqrt{7}}$  este atât pătratul unui număr natural  $x$ , cât și cubul unui număr natural  $y$ , aflați valoarea produsului  $x \cdot y$ .

*Supliment Gazeta Matematică Nr.11/2025*

**Soluție.**

$$\sqrt{7} \cdot a = \sqrt{7^2} + \sqrt{7^3} + \sqrt{7^4} \dots + \sqrt{7^{2026}}. \text{ Atunci:}$$

$$\sqrt{7} \cdot a - a = \sqrt{7^2} + \sqrt{7^3} + \sqrt{7^4} \dots + \sqrt{7^{2026}} - \sqrt{7} - \sqrt{7^2} - \sqrt{7^3} - \dots - \sqrt{7^{2025}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(\sqrt{7} - 1) = \sqrt{7^{2026}} - \sqrt{7} \Rightarrow a = \frac{7^{1013} - \sqrt{7}}{\sqrt{7} - 1} \Rightarrow a = \frac{(7^{1013} - \sqrt{7})(\sqrt{7} + 1)}{6}.$$

$$b = 7\sqrt{7} + \frac{42 \cdot \frac{(7^{1013} - \sqrt{7})(\sqrt{7} + 1)}{6}}{1 + \sqrt{7}} = 7\sqrt{7} + \frac{7(7^{1013} - \sqrt{7})(\sqrt{7} + 1)}{1 + \sqrt{7}} = 7\sqrt{7} + 7(7^{1013} - \sqrt{7}) =$$

$$= 7\sqrt{7} + 7^{1014} - 7\sqrt{7} = 7^{1014}.$$

$$b = x^2 \Rightarrow x^2 = 7^{1014}, \text{ dar } x \text{ număr natural și obținem } x = 7^{507}.$$

$$b = y^3 \Rightarrow y^3 = 7^{1014}, \text{ dar } y \text{ număr natural și obținem } y = 7^{338}.$$

$$\text{Atunci: } x \cdot y = 7^{507} \cdot 7^{338} = 7^{845}.$$

**Barem.**

$\sqrt{7} \cdot a = \sqrt{7^2} + \sqrt{7^3} + \sqrt{7^4} \dots + \sqrt{7^{2026}}. \text{ Atunci:}$ $\sqrt{7} \cdot a - a = \sqrt{7^2} + \sqrt{7^3} + \sqrt{7^4} \dots + \sqrt{7^{2026}} - \sqrt{7} - \sqrt{7^2} - \sqrt{7^3} - \dots - \sqrt{7^{2025}} \Rightarrow$ $\Rightarrow a(\sqrt{7} - 1) = \sqrt{7^{2026}} - \sqrt{7} \Rightarrow a = \frac{7^{1013} - \sqrt{7}}{\sqrt{7} - 1} \Rightarrow a = \frac{(7^{1013} - \sqrt{7})(\sqrt{7} + 1)}{6}$	<b>10p</b>
$b = 7\sqrt{7} + \frac{42 \cdot \frac{(7^{1013} - \sqrt{7})(\sqrt{7} + 1)}{6}}{1 + \sqrt{7}} = 7\sqrt{7} + \frac{7(7^{1013} - \sqrt{7})(\sqrt{7} + 1)}{1 + \sqrt{7}} = 7\sqrt{7} + 7(7^{1013} - \sqrt{7}) =$ $= 7\sqrt{7} + 7^{1014} - 7\sqrt{7} = 7^{1014}.$	<b>6p</b>
$b = x^2 \Rightarrow x^2 = 7^{1014}, \text{ dar } x \text{ număr natural și obținem } x = 7^{507}.$	<b>2p</b>
$b = y^3 \Rightarrow y^3 = 7^{1014}, \text{ dar } y \text{ număr natural și obținem } y = 7^{338}.$	<b>2p</b>
Atunci: $x \cdot y = 7^{507} \cdot 7^{338} = 7^{845}.$	<b>1p</b>

**4. (21p)** Patrulaterul  $ABCD$  este un trapez isoscel, cu  $AB \parallel CD$ ,  $AD = BC = CD$  și  $\angle DAB = 80^\circ$ . Fie punctul  $E$  pe segmentul  $BD$  astfel încât  $DE = DC$ .

**a) (11p)** Arătați că triunghiul  $ADE$  este echilateral.

**b) (10p)** Dacă  $AB \cap CE = \{T\}$ , arătați că  $AD + TB = BD$ .

\*\*\*

**Soluție.**

a)  $ABCD$  este un trapez isoscel  $\Rightarrow \angle DAB = \angle CBA = 80^\circ$  și  $\angle ADC = \angle BCD = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ .

Din  $\triangle BCD$  isoscel cu baza  $BD$  obținem că:

$$\angle CDB = \angle CBD = \frac{180^\circ - \angle BCD}{2} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ.$$

$$\angle ADB = \angle ADC - \angle BDC = 100^\circ - 40^\circ = 60^\circ.$$

Din  $\triangle ADE$  cu  $AD = DE$  și  $\angle ADE = 60^\circ \Rightarrow \triangle ADE$  echilateral.

b) Din  $\triangle DEC$  isoscel cu baza  $CE$  obținem că:

$$\angle DCE = \angle DEC = \frac{180^\circ - \angle EDC}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ.$$

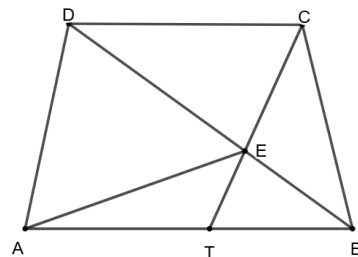
$$\angle BET = \angle DEC = 70^\circ \text{ (opuse la vârf)}$$

$$\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ.$$

Din  $\triangle BET$  obținem:  $\angle ETB = 180^\circ - (\angle TEB + \angle TBE) = 180^\circ - (70^\circ + 40^\circ) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ .

În  $\triangle BET$  avem  $\angle ETB = \angle TEB = 70^\circ \Rightarrow \triangle BET$  isoscel cu baza  $ET \Rightarrow EB = TB$ .

Atunci:  $AD + TB = DE + EB = DB$ .

**Barem.**

a) Figura	2p
Din $ABCD$ este un trapez isoscel obținem: $\angle DAB = \angle CBA = 80^\circ$ și $\angle ADC = \angle BCD = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ .	3p
Din $\triangle BCD$ isoscel cu baza $BD$ obținem că: $\angle CDB = \angle CBD = \frac{180^\circ - \angle BCD}{2} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$ .	2p
$\angle ADB = \angle ADC - \angle BDC = 100^\circ - 40^\circ = 60^\circ$ .	2p
Din $\triangle ADE$ cu $AD = DE$ și $\angle ADE = 60^\circ \Rightarrow \triangle ADE$ echilateral.	2p
b) Din $\triangle DEC$ isoscel cu baza $CE$ obținem că: $\angle DCE = \angle DEC = \frac{180^\circ - \angle EDC}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$ .	2p
$\angle BET = \angle DEC = 70^\circ$ (opuse la vârf)	2p
$\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$ .	2p
Din $\triangle BET$ : $\angle ETB = 180^\circ - (\angle TEB + \angle TBE) = 180^\circ - (70^\circ + 40^\circ) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ . În $\triangle BET$ avem $\angle ETB = \angle TEB = 70^\circ \Rightarrow \triangle BET$ isoscel cu baza $ET \Rightarrow EB = TB$ .	2p
Atunci: $AD + TB = DE + EB = DB$ .	2p

**Notă:** Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.