

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 7 februarie 2026
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VI-a

1. (21p) Se consideră mulțimile $A = \{\overline{2alb} / \overline{2alb} : 18\}$ și $B = \{\overline{2cld} / \overline{2cld} : 12\}$
a) (14p) Determinați elementele mulțimilor A și B .
a) (7p) Calculați $(A \cup B) - (A \cap B)$.

Costică Parfenie, Fălticeni

Soluție.

a) Cum $18 = 2 \cdot 9$, $(2; 9) = 1$ și $\overline{2alb} : 18 \Rightarrow \overline{2alb} : 2$ și $\overline{2alb} : 9$.

Din $\overline{2alb} : 2 \Rightarrow b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Din $\overline{2al0} : 9 \Rightarrow a = 6$. Din $\overline{2al2} : 9 \Rightarrow a = 4$. Din $\overline{2al4} : 9 \Rightarrow a = 2$.

Din $\overline{2al6} : 9 \Rightarrow a \in \{0; 9\}$. Din $\overline{2al8} : 9 \Rightarrow a = 7$.

Deci, $A = \{2610; 2412; 2214; 2016; 2916; 2718\}$.

Cum $12 = 4 \cdot 3$, $(4; 3) = 1$ și $\overline{2cld} : 12 \Rightarrow \overline{2cld} : 4$ și $\overline{2cld} : 3$.

Din $\overline{2cld} : 4 \Rightarrow d \in \{2; 6\}$. Din $\overline{2cl2} : 3 \Rightarrow c \in \{1; 4; 7\}$. Din $\overline{2cl6} : 3 \Rightarrow c \in \{0; 3; 6; 9\}$.

Deci, $B = \{2112; 2412; 2712; 2016; 2316; 2616; 2916\}$.

b) $A \cup B = \{2610; 2412; 2214; 2016; 2916; 2718; 2112; 2712; 2316; 2616\}$

$A \cap B = \{2412; 2016; 2916\}$

$(A \cup B) - (A \cap B) = \{2610; 2214; 2718; 2112; 2712; 2316; 2616\}$

Barem.

| | |
|---|----|
| a) Cum $18 = 2 \cdot 9$, $(2; 9) = 1$ și $\overline{2alb} : 18 \Rightarrow \overline{2alb} : 2$ și $\overline{2alb} : 9$. | 1p |
| Din $\overline{2alb} : 2 \Rightarrow b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. | 1p |
| Din $\overline{2al0} : 9 \Rightarrow a = 6$. Din $\overline{2al2} : 9 \Rightarrow a = 4$. Din $\overline{2al4} : 9 \Rightarrow a = 2$. Din $\overline{2al6} : 9 \Rightarrow a \in \{0; 9\}$. Din $\overline{2al8} : 9 \Rightarrow a = 7$. Deci, $A = \{2610; 2412; 2214; 2016; 2916; 2718\}$. | 5p |
| Cum $12 = 4 \cdot 3$, $(4; 3) = 1$ și $\overline{2cld} : 12 \Rightarrow \overline{2cld} : 4$ și $\overline{2cld} : 3$. Din $\overline{2cld} : 4 \Rightarrow d \in \{2; 6\}$. | 2p |
| Din $\overline{2cl2} : 3 \Rightarrow c \in \{1; 4; 7\}$. Din $\overline{2cl6} : 3 \Rightarrow c \in \{0; 3; 6; 9\}$. Deci, $B = \{2112; 2412; 2712; 2016; 2316; 2616; 2916\}$. | 5p |
| b) $A \cup B = \{2610; 2412; 2214; 2016; 2916; 2718; 2112; 2712; 2316; 2616\}$ | 3p |
| $A \cap B = \{2412; 2016; 2916\}$ | 3p |
| $(A \cup B) - (A \cap B) = \{2610; 2214; 2718; 2112; 2712; 2316; 2616\}$ | 1p |

2. (21p) Pe cercul de centru O și rază r se consideră punctele E, D, U, C, A, T, I , în această ordine, astfel încât măsurile arcelor mici $ED, DU, UC, CA, AT, TI, IE$ sunt invers proporționale cu numerele $0,5; 0,25; 1; 0,2; 0,(3); 0,(3); 0,1(6)$.

- a) (12p) Determinați măsurile unghiurilor EOD , DOU , UOC , COA , AOT , TOI și IOE .
b) (9p) Arătați că semidreapta OC este bisectoarea unghiului DOA și că dreapta UI este mediatoarea segmentului EA .

Claudia Marchitan, Suceava

Soluție.

a) $ED \cdot 0,5 = DU \cdot 0,25 = UC \cdot 1 = CA \cdot 0,2 = AT \cdot 0,3 = TI \cdot 0,3 = IE \cdot 0,1(6) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{ED}{2} = \frac{DU}{4} = \frac{UC}{1} = \frac{CA}{5} = \frac{AT}{3} = \frac{TI}{3} = \frac{IE}{6} = k, \text{ unde}$$

$$k = \frac{ED + DU + UC + CA + AT + TI + IE}{24} = \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$$

Atunci: $\sphericalangle EOD = ED = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$,

$\sphericalangle DOU = DU = 4 \cdot 15^\circ = 60^\circ$, $\sphericalangle UOC = UC = 15^\circ$

$\sphericalangle COA = CA = 5 \cdot 15^\circ = 75^\circ$, $\sphericalangle AOT = AT = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$

$\sphericalangle TOI = TI = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$, $\sphericalangle IOE = IE = 6 \cdot 15^\circ = 90^\circ$.

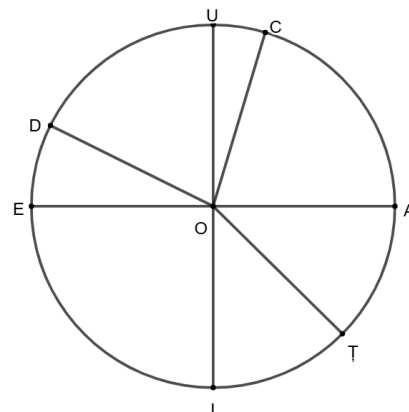
b) $\sphericalangle DOC = \sphericalangle DOU + \sphericalangle UOC = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$

Cum semidreapta OC este în interiorul unghiului DOA și $\sphericalangle DOC = \sphericalangle COA = 75^\circ$, obținem că semidreapta OC este bisectoarea unghiului DOA .

$ED + DU + UC + CA = 30^\circ + 60^\circ + 15^\circ + 75^\circ = 180^\circ \Rightarrow EA = 180^\circ \Rightarrow EA \text{ diametru} \Rightarrow O \text{ mijloc } EA$.

$IE + ED + DU = 90^\circ + 30^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow IU = 180^\circ \Rightarrow IU \text{ diametru} \Rightarrow O \in IU$. Dar, $\sphericalangle IOE = 90^\circ$ și obținem $IU \perp EA$.

Din $IU \perp EA$, O mijloc EA , unde $\{O\} = IU \cap EA$, obținem că dreapta UI este mediatoarea segmentului EA .



Barem.

| | |
|---|----|
| a) Figura | 1p |
| $ED \cdot 0,5 = DU \cdot 0,25 = UC \cdot 1 = CA \cdot 0,2 = AT \cdot 0,3 = TI \cdot 0,3 = IE \cdot 0,1(6) \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{ED}{2} = \frac{DU}{4} = \frac{UC}{1} = \frac{CA}{5} = \frac{AT}{3} = \frac{TI}{3} = \frac{IE}{6} = k$ | 3p |
| $k = \frac{ED + DU + UC + CA + AT + TI + IE}{24} = \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$ | 1p |
| $\sphericalangle EOD = ED = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$, $\sphericalangle DOU = DU = 4 \cdot 15^\circ = 60^\circ$, $\sphericalangle UOC = UC = 15^\circ$, $\sphericalangle COA = CA = 5 \cdot 15^\circ = 75^\circ$, $\sphericalangle AOT = AT = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$, $\sphericalangle TOI = TI = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$, $\sphericalangle IOE = IE = 6 \cdot 15^\circ = 90^\circ$. | 7p |
| b) $\sphericalangle DOC = \sphericalangle DOU + \sphericalangle UOC = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$ | 2p |
| Cum semidreapta OC este în interiorul unghiului DOA și $\sphericalangle DOC = \sphericalangle COA = 75^\circ$, obținem că semidreapta OC este bisectoarea unghiului DOA . | 1p |
| $ED + DU + UC + CA = 30^\circ + 60^\circ + 15^\circ + 75^\circ = 180^\circ \Rightarrow EA = 180^\circ \Rightarrow EA \text{ diametru} \Rightarrow$ $\Rightarrow O \text{ mijloc } EA$. | 2p |
| $IE + ED + DU = 90^\circ + 30^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow IU = 180^\circ \Rightarrow IU \text{ diametru} \Rightarrow O \in IU$. Dar, $\sphericalangle IOE = 90^\circ$ și obținem $IU \perp EA$. | 2p |
| Din $IU \perp EA$, O mijloc EA , unde $\{O\} = IU \cap EA$, obținem că dreapta UI este mediatoarea segmentului EA . | 2p |

3. (21p) Fie punctele coliniare A, B, C , în această ordine, astfel încât B să nu fie mijlocul segmentului AC , iar punctul D , care nu aparține dreptei AC , se ia astfel încât unghiul ABD să fie ascuțit. Bisectoarea unghiului ABD intersectează AD în P , iar bisectoarea unghiului CBD intersectează CD în Q . Paralela prin D la AC intersectează dreapta BP în E și dreapta BQ în F .

a) **(11p)** Arătați că dreptele EB și FB sunt perpendiculare.

b) **(10p)** Dacă măsurile unghiurilor EBD și FBD sunt direct proporționale cu 4 și 5, determinați măsurile unghiurilor BEF și BFE .

Claudia Marchitan, Suceava

Soluție.

a)

$$BP \text{ bisectoarea } \angle ABD \Rightarrow \angle ABP = \angle PBD = \frac{\angle ABD}{2} = x$$

$$BQ \text{ bisectoarea } \angle CBD \Rightarrow \angle CBQ = \angle QBD = \frac{\angle CBD}{2} = y$$

$$\angle EBF = \angle EBD + \angle DBF = x + y$$

$$A, B, C \text{ coliniare} \Rightarrow \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ABD + \angle CBD = 180^\circ \Rightarrow 2x + 2y = 180^\circ \Rightarrow x + y = 90^\circ$$

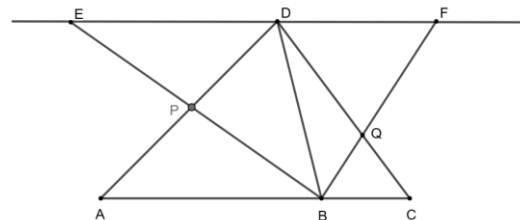
$$\text{Atunci } \angle EBF = x + y = 90^\circ \Rightarrow EB \perp FB.$$

b) $\frac{\angle EBD}{4} = \frac{\angle FBD}{5} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = k$, unde $k = \frac{x+y}{9} = \frac{90^\circ}{9} = 10^\circ$.

$$\text{Atunci } \angle EBD = 4 \cdot k = 4 \cdot 10^\circ = 40^\circ \text{ și } \angle FBD = 5 \cdot k = 5 \cdot 10^\circ = 50^\circ.$$

Din $EF \parallel AC$, cu EB secantă $\Rightarrow \angle BEF = \angle ABE$ (alterne interne). Dar, $\angle ABE = \angle EBD = 40^\circ$ și obținem $\angle BEF = 40^\circ$.

Din $EF \parallel AC$, cu FB secantă $\Rightarrow \angle BFE = \angle CBF$ (alterne interne). Dar, $\angle CBF = \angle FBD = 50^\circ$ și obținem $\angle BFE = 50^\circ$.



Barem.

| | |
|--|----|
| a) Figura | 3p |
| $BP \text{ bisectoarea } \angle ABD \Rightarrow \angle ABP = \angle PBD = \frac{\angle ABD}{2} = x$ | 2p |
| $BQ \text{ bisectoarea } \angle CBD \Rightarrow \angle CBQ = \angle QBD = \frac{\angle CBD}{2} = y$ | 2p |
| $A, B, C \text{ coliniare} \Rightarrow \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow$ | 2p |
| $\Rightarrow \angle ABD + \angle CBD = 180^\circ \Rightarrow 2x + 2y = 180^\circ \Rightarrow x + y = 90^\circ \Rightarrow \angle EBF = 90^\circ \Rightarrow EB \perp FB$ | 2p |
| b) $\frac{\angle EBD}{4} = \frac{\angle FBD}{5} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = k$, $k = \frac{x+y}{9} = \frac{90^\circ}{9} = 10^\circ$ | 4p |
| Atunci $\angle EBD = 4 \cdot k = 4 \cdot 10^\circ = 40^\circ$ și $\angle FBD = 5 \cdot k = 5 \cdot 10^\circ = 50^\circ$. | 2p |
| Din $EF \parallel AC$, cu EB secantă $\Rightarrow \angle BEF = \angle ABE$ (alterne interne). Dar, $\angle ABE = \angle EBD = 40^\circ$ și obținem $\angle BEF = 40^\circ$. | 2p |
| Din $EF \parallel AC$, cu FB secantă $\Rightarrow \angle BFE = \angle CBF$ (alterne interne). Dar, $\angle CBF = \angle FBD = 50^\circ$ și obținem $\angle BFE = 50^\circ$. | 2p |

4. (21p) Aflați numerele naturale de forma $\overline{y0yx}$ știind că au exact 15 divizori naturali și descompunerea lor în factori primi este $x^y \cdot (x-y)^{2y}$.

Gazeta Matematică Nr.10/2025

Soluție.

Cum $x^y \cdot (x-y)^{2y}$ este descompunerea în factori primi a numărului $\overline{y0yx}$, înseamnă că x și $x-y$ sunt numere prime diferite între ele, iar y este număr natural nenul.

Numărul de divizori naturali ai numărului $\overline{y0yx}$ este $(y+1)(2y+1)=15 \Rightarrow y+1$ și $2y+1$ sunt divizori naturali ai lui 15. Cum $y \geq 1 \Rightarrow y+1 \geq 2$, $2y+1 \geq 3$ și $y+1 < 2y+1$, obținem singura variantă $y+1=3$ și $2y+1=5$, care se realizează pentru $y=2$.

Cum $x-y=x-2$ este număr prim diferit de numărul prim $x \Rightarrow x-2 \geq 2 \Rightarrow x \geq 4$, dar x prim și obținem $x \geq 5$.

Dacă $x=5 \Rightarrow 5^2 \cdot (5-2)^{2 \cdot 2} = 5^2 \cdot 3^4 = 25 \cdot 81 = 2025$ care este de forma $\overline{y0yx}$.

Dacă $x=7 \Rightarrow 7^2 \cdot (7-2)^{2 \cdot 2} = 7^2 \cdot 5^4 = 49 \cdot 625 = 30625$ care nu este de forma $\overline{y0yx}$.

Pentru x număr prim mai mare sau egal 7, $x^y \cdot (x-y)^{2y}$ va fi un număr care are cel puțin 5 cifre, deci nu este de forma $\overline{y0yx}$.

Deci, singura soluție este $x=5$ și $y=2$, când obținem $\overline{y0yx} = 2025$.

Barem.

| | |
|---|----|
| Cum $x^y \cdot (x-y)^{2y}$ este descompunerea în factori primi a numărului $\overline{y0yx}$, înseamnă că x și $x-y$ sunt numere prime diferite între ele, iar y este număr natural nenul. | 2p |
| Numărul de divizori naturali ai numărului $\overline{y0yx}$ este $(y+1)(2y+1)=15$. | 3p |
| $y+1$ și $2y+1$ sunt divizori naturali ai lui 15, adică: 1, 3, 5 sau 15. | 4p |
| Cum $y \geq 1 \Rightarrow y+1 \geq 2$, $2y+1 \geq 3$ și $y+1 < 2y+1$, obținem singura variantă $y+1=3$ și $2y+1=5$, care se realizează pentru $y=2$. | 3p |
| Cum $x-y=x-2$ este număr prim diferit de numărul prim $x \Rightarrow x-2 \geq 2 \Rightarrow x \geq 4$, dar x prim și obținem $x \geq 5$. | 3p |
| Dacă $x=5 \Rightarrow 5^2 \cdot (5-2)^{2 \cdot 2} = 5^2 \cdot 3^4 = 25 \cdot 81 = 2025$ care este de forma $\overline{y0yx}$. | 2p |
| Dacă $x=7 \Rightarrow 7^2 \cdot (7-2)^{2 \cdot 2} = 7^2 \cdot 5^4 = 49 \cdot 625 = 30625$ care nu este de forma $\overline{y0yx}$. | 2p |
| Pentru x număr prim mai mare sau egal 7, $x^y \cdot (x-y)^{2y}$ va fi un număr care are cel puțin 5 cifre, deci nu este de forma $\overline{y0yx}$. Deci, singura soluție este $x=5$ și $y=2$, când obținem $\overline{y0yx} = 2025$. | 2p |

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.