

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA, 7 februarie 2026

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a XII-a

1. (21p) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.

a) (7p) Arătați că $I_1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = 1$.

b) (7p) Arătați că $I_2 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

c) (7p) Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este crescător, cu limita $\ln 2$.

Se consideră cunoscut că $\ln(1+x) \leq x$, pentru orice $x \in (-1, \infty)$.

Bacalaureat – Test antrenament 11/ 2021

Soluție:

$$a) I_1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \int_0^1 dx = x|_0^1 = 1.$$

$$b) I_2 = 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = 2(x - \arctg x)|_0^1 = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

c) $I_n = \int_0^1 x \cdot \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} dx = \int_0^1 x \cdot (\ln(1+x^n))' dx = x \ln(1+x^n)|_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = \ln 2 - J_n$, unde $J_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$. Cum $0 = \ln 1 \leq \ln(1+x^{n+1}) \leq \ln(1+x^n) \Leftrightarrow 0 \leq J_{n+1} \leq J_n, \forall n \geq 1$, deducem că $I_{n+1} - I_n = J_n - J_{n+1} \geq 0$, deci șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este crescător. Folosind inegalitatea dată obținem că $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n, \forall x \in [0,1]$ și orice $n \geq 1$, de unde $0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}|_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \ln 2$.

Barem

a) Obține $I_1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \int_0^1 dx =$	4 p
$= x _0^1 = 1$	3 p
b) Obține $I_2 = 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = 2(x - \arctg x) _0^1 =$	4 p
$= 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}$	3 p
c) Obține $I_n = \ln 2 - J_n$, unde $J_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$	2 p
Arată că $(I_n)_{n \geq 1}$ este crescător	2 p
Obține că $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0$	2 p
Finalizare $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \ln 2$	1 p

2. (21p) Pe mulțimea $M = (-1,1)$ se dă legea de compoziție asociativă „ $*$ ” cu proprietatea că

$$x * y * z = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + yz + zx}, \forall x, y, z \in M.$$

Arătați că $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, pentru orice $x, y \in M$.

Ion Bursuc, Suceava

Soluție:

Observăm că $x * (0 * 0) = (0 * 0) * x = x$, pentru orice $x \in M$, deci $e = 0 * 0 \in M$ este elementul neutru al legii „ $*$ ”. Atunci $e * 0 * e = 0$, iar pe de altă parte $e * 0 * e = \frac{2e}{1+e}$. Egalând cele două scrieri obținem $e = 0$. Deducem că $x * y = x * y * 0 = \frac{x+y}{1+xy}$, pentru orice $x, y \in M$.

Barem

Obține că $0 * 0$ este elementul neutru	8 p
Obține că $0 * 0 = 0$	8 p
Finalizare $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, pentru orice $x, y \in M$	5 p

3. (21p) Fie (G, \cdot) un grup. Demonstrați că dacă există o funcție $f: G \rightarrow G$ cu proprietatea că $xy(f(y))^2 = f(y)x^3$, pentru orice $x, y \in G$ atunci grupul G este abelian.

Anca Andrei, Suceava

Soluție:

Fie e elementul neutru al grupului. Pentru $x = e$ obținem $y(f(y))^2 = f(y)$, $\forall y \in G$, de unde $yf(y) = e \Leftrightarrow f(y) = y^{-1}$, $\forall y \in G$. Astfel, relația din ipoteză se rescrie $xy^{-1} = y^{-1}x^3$, $\forall x, y \in G$. Pentru $y = e$ găsim $x^2 = e$, $\forall x \in G$. Atunci $(xy)^2 = e = x^2y^2$, $\forall x, y \in G$, de unde $xy = yx$, $\forall x, y \in G$, adică G este grup abelian.

Barem

Obține $y(f(y))^2 = f(y)$, $\forall y \in G$	6 p
Deduce că $f(y) = y^{-1}$, $\forall y \in G$	5 p
Obține că $x^2 = e$, $\forall x \in G$	5 p
Finalizare G este abelian	5 p

4. (21p) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $0 \leq a < b$ și funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă, cu proprietatea că $\int_a^b f(x)dx = bf(a) - af(b)$. Arătați că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Gazeta Matematică 6-7-8/2025

Soluție:

Presupunem că $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Cum f' are proprietatea lui Darboux, deducem că f' are semn constant pe intervalul (a, b) . Considerăm cazul $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ (celălalt caz se tratează analog) și rezultă că f este strict crescătoare pe intervalul $[a, b]$. Considerăm funcția $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin $g(x) = \int_a^x f(t)dt - xf(a) + af(x)$. Evident g este derivabilă pe $[a, b]$ și pentru orice $x \in [a, b]$ avem $g'(x) = f(x) - f(a) + af'(x)$. Dar $x \in (a, b)$ implică $f(x) > f(a)$ și cum $a \geq 0, f'(x) > 0$, deducem că $g'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$. Atunci g e strict crescătoare pe $[a, b]$, deci $0 = g(a) < g(b) = 0$, contradicție. Rezultă că presupunerea e falsă.

Barem

Presupune că $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ și deduce că f' are semn constant pe (a, b)	5 p
Deduce că f este strict monotonă pe intervalul $[a, b]$	5 p
Obține că funcția $g(x) = \int_a^x f(t)dt - xf(a) + af(x)$ este strict monotonă pe $[a, b]$	7 p
Obține contradicție și finalizare	4 p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.