

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA - 7 FEBRUARIE 2026

CLASA a XI-a

H2 Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiecte propuse de *Carp Gabriela Dorina, Câmpulung Moldovenesc*

1. (20p) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2ax + a - 1, & x \leq 1 \\ a^2x^2 + ax, & x > 1 \end{cases}$, unde a este un număr real.

a) (5p) Determinați numărul real a pentru care funcția f este continuă în $x = 1$.

b) (10p) Pentru $a = -2$, calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x) + x})$.

c) (5p) Pentru $a = -1$, arătați că ecuația $f(x) + 5^x = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $[-1, 0]$

Soluție: a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (2ax + a - 1) = 3a - 1$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (a^2x^2 + ax) = a^2 + a$; $f(1) = 3a - 1$; f este

continua în $x = 1 \Leftrightarrow 3a - 1 = a^2 + a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x) + x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 2x} - \sqrt{4x^2 - x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{4x^2 - 2x} + \sqrt{4x^2 - x}} = -\frac{1}{4}$.

c) Pentru x din intervalul $[-1, 0]$ și $a = -1$, ecuația $f(x) + 5^x = 0$ devine $-2x - 2 + 5^x = 0$. Se consideră funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -2x - 2 + 5^x$. Cum g este continuă pe \mathbb{R} și $g(-1) \cdot g(0) = \frac{1}{5} \cdot (-1) = -\frac{1}{5} < 0$, rezultă că ecuația $g(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $[-1, 0]$.

Barem

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (2ax + a - 1) = 3a - 1$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (a^2x^2 + ax) = a^2 + a$, $f(1) = 3a - 1$	2 p
f este continua în $x = 1 \Leftrightarrow 3a - 1 = a^2 + a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.	3 p
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x) + x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 2x} - \sqrt{4x^2 - x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 2x - (4x^2 - x)}{\sqrt{4x^2 - 2x} + \sqrt{4x^2 - x}}$	4p
$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{4x^2 - 2x} + \sqrt{4x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 \left(4 - \frac{2}{x}\right)} + \sqrt{x^2 \left(4 - \frac{1}{x}\right)}} =$	4p
$= -\frac{1}{4}$	2p
c) Pentru $a = -1$ și $x \in [-1, 0] \Rightarrow f(x) + 5^x = 0 \Leftrightarrow -2x - 2 + 5^x = 0$. Consideră funcția	2p
$g(-1) \cdot g(0) = \frac{1}{5} \cdot (-1) = -\frac{1}{5} < 0 \Rightarrow g(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $[-1, 0]$.	3p

2. (20p) În $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a-4 & 3 \\ 8 & a-6 \end{pmatrix}$ și $B = A - A^2 + A^3 - A^4 + \dots - A^{2026}$.

a) (5 p) Pentru $a = 10$, determinați numărul întreg m pentru care $A^2 = mA$.

b) (5 p) Pentru $a = 10$, determinați matricea B .

c) (10p) Determinați matricea $A = \begin{pmatrix} a-4 & 3 \\ 8 & a-6 \end{pmatrix}$ care verifică relația $A^2 = 2A + 24I_2$.

Soluție: a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 30 \\ 80 & 40 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = 10A \Rightarrow m = 10$.

b) Din relația de la punctul a), obținem $A^2 = 10A \Rightarrow A^3 = 10^2 A, \dots, A^{2026} = 10^{2025} A \Rightarrow$
 $B = A - A^2 + A^3 - A^4 + \dots - A^{2026} = (1 - 10 + 10^2 - \dots - 10^{2025})A =$
 $= \frac{(-10)^{2026} - 1}{-10 - 1} \cdot A = \frac{10^{2026} - 1}{-11} \cdot A = \frac{1 - 10^{2026}}{11} \cdot A$.

c) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a-4 & 3 \\ 8 & a-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-4 & 3 \\ 8 & a-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 8a + 40 & 6a - 30 \\ 16a - 80 & a^2 - 12a + 60 \end{pmatrix}$;

$2A + 24I_2 = 2 \begin{pmatrix} a-4 & 3 \\ 8 & a-6 \end{pmatrix} + 24 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+16 & 6 \\ 16 & 2a+12 \end{pmatrix}$; $A^2 = 2A + 24I_2 \Leftrightarrow a^2 - 10a + 24 = 0$,

$6a - 30 = 6, 16a - 80 = 16, a^2 - 14a + 48 = 0$. De aici rezultă $a = 6$ și $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Barem

<p>a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 30 \\ 80 & 40 \end{pmatrix} =$ $= 10 \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = 10A \Rightarrow m = 10$</p>	<p>3 p 2 p</p>
<p>b) $A^2 = 10A \Rightarrow A^3 = 10^2 A, \dots, A^{2026} = 10^{2025} A \Rightarrow B = A - A^2 + A^3 - A^4 + \dots - A^{2026}$ $= (1 - 10 + 10^2 - \dots - 10^{2025})A$ $= \frac{(-10)^{2026} - 1}{-10 - 1} \cdot A = \frac{10^{2026} - 1}{-11} \cdot A = \frac{1 - 10^{2026}}{11} \cdot A$</p>	<p>3p 2p</p>
<p>c) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 - 8a + 40 & 6a - 30 \\ 16a - 80 & a^2 - 12a + 60 \end{pmatrix}, 2A + 24I_2 = \begin{pmatrix} 2a+16 & 6 \\ 16 & 2a+12 \end{pmatrix}$ $A^2 = 2A + 24I_2 \Leftrightarrow a^2 - 10a + 24 = 0, 6a - 30 = 6, 16a - 80 = 16, a^2 - 14a + 48 = 0$ $\Rightarrow a = 6$ și $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$</p>	<p>3p 4p 3p</p>

3. a) (10p) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0, c < 0$ și funcția $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|ax^2 + bx + c|}{x-1}$. Determinați a, b, c , astfel încât $f(0) = -2$, iar dreapta h având ecuația $y = x + 2$ să fie asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$ a graficului funcției f .

b) (10p) Calculați $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2x} + \dots + \sqrt{x^2 + nx} + nx \right)$.

Soluție:

a) Deoarece $f(0) = -|c|$ și, totodată, $f(0) = -2$, rezultă $|c| = 2$, de unde $c = -2$ (pentru că $c < 0$).

Cum $y = x + 2$ ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la G_f rezultă $m = 1$ și $n = 2$.

Cum $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = |a| = a$ (pentru că $a > 0$) și, pe de altă parte, $m = 1$, deducem că $a = 1$. Deci

$$f(x) = \frac{|x^2 + bx - 2|}{x-1}.$$

Deoarece într-o vecinătate a lui $+\infty$, $x^2 + bx - 2 > 0$, rezultă că $f(x) = \frac{x^2 + bx - 2}{x-1}$. Având în vedere că

$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b+1)x - 2}{x-1} = b+1$, deducem că $b+1 = 2$, de unde $b = 1$. Deci, $a = b = 1$ și $c = -2$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} + x \right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} + x \right) + \dots + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + nx} + x \right) =$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} + \dots + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{nx}{\sqrt{x^2 + nx} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-2x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-2x} + \dots + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{nx}{-2x} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \dots + \frac{n}{2} \right) = -\frac{n(n+1)}{4}$$

Barem

<p>a) $f(0) = - c$, $f(0) = -2 \Rightarrow c = 2$ și cum $c < 0 \Rightarrow c = -2$.</p> <p>$y = x + 2$ ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la $G_f \Rightarrow m = 1$ și $n = 2$</p> <p>$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a = a$ și cum $m = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow$</p> <p>$f(x) = \frac{ x^2 + bx - 2 }{x-1} = \frac{x^2 + bx - 2}{x-1}$ deoarece într-o vecinătate a lui $+\infty$, $x^2 + bx - 2 > 0$</p> <p>$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b+1)x - 2}{x-1} = b+1 \Rightarrow b+1 = 2 \Rightarrow b = 1$.</p>	<p>2p</p>
<p>b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} + x \right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} + x \right) + \dots + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + nx} + x \right) =$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} + \dots + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{nx}{\sqrt{x^2 + nx} - x} =$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-2x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-2x} + \dots + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{nx}{-2x} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \dots + \frac{n}{2} \right) = -\frac{n(n+1)}{4}$</p>	<p>2p</p> <p>4p</p> <p>4p</p>

4. a) (15p) Într-un proiect de amenajare a unui parc urban, un arhitect trebuie să verifice dacă trei stâlpi de iluminat, poziționați pentru a ilumina o alee dreaptă, sunt aliniați perfect, echidistant, pe o linie dreaptă. Acest lucru este esențial pentru a optimiza cablul electric subteran, care trebuie să urmeze o traiectorie liniară minimă, reducând astfel costurile. Coordonatele stâlpilor în planul parcului, măsurate față de un punct de referință fix sunt: stâlpul 1 – punctul A(2,3), stâlpul 2 – punctul B(5,7) și stâlpul 3 – punctul C(8, 11).

La ce concluzie a ajuns arhitectul: acești trei stâlpi sunt coliniari și echidistanți ?

b) (15p) În cadrul aceluiași proiect, arhitectul trebuie să amenajeze un parc în formă triunghiulară, delimitat de punctele A, B, C, unde A(2,3), B(2m+1,2) și C(3,2m+2). Pentru optimizarea costurilor de amenajare, inclusiv cantitatea de gazon sau pavaj necesar, arhitectul trebuie să determine coordonatele punctelor B și C astfel încât aria terenului triunghiular ABC să fie minimă.

Care sunt coordonatele punctelor B și C găsite de arhitect?

Soluție: a) Pentru ca punctele A, B, C să fie coliniare este necesar ca $\Delta = 0$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 8 & 11 & 1 \end{vmatrix}$. Prin

calcul se arată că $\Delta = 0$, deci punctele sunt coliniare și cei trei stâlpi sunt așezați în linie dreaptă.

Cum $\frac{x_A + x_C}{2} = x_B$ și $\frac{y_A + y_C}{2} = y_B$, rezultă că punctul B este mijlocul segmentului AC, deci stâlpii așezați în A, B, C sunt echidistanți.

b) Știm că aria triunghiului ABC este $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2m+1 & 2 & 1 \\ 3 & 2m+2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[(2m-1)^2 + 1]$.

Cum $(2m-1)^2 \geq 0$, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$, rezultă că $A_{\Delta ABC} \geq \frac{1}{2}$, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$. Deci valoarea minimă pentru $A_{\Delta ABC}$ este $\frac{1}{2}$, iar această valoare este obținută atunci când $2m-1=0$ și $m = \frac{1}{2}$. Prin urmare, B(2,2) și C(3,3).

Barem

<p>a) A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 8 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $\Delta = 14 + 55 + 24 - 56 - 22 - 15 = 0$.</p>	6p
<p>$\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+8}{2} = 5 = x_B$ și $\frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+11}{2} = 7 = y_B \Rightarrow$ B este mijlocul segmentului AC \Rightarrow stâlpii așezați în A, B, C sunt echidistanți.</p>	6p 3 p
<p>b) $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \Delta$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2m+1 & 2 & 1 \\ 3 & 2m+2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[(2m-1)^2 + 1] = \frac{1}{2}(2m-1)^2 + \frac{1}{2}$.</p>	6 p

$(2m-1)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(2m-1)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow A_{\Delta ABC} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ valoarea minimă pentru $A_{\Delta ABC}$ este $\frac{1}{2}$	6 p
valoare este obținută atunci când $2m-1=0$ și $m = \frac{1}{2} \Rightarrow B(2,2)$, iar $C(3,3)$.	3 p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.