

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA - 7 FEBRUARIE 2026
CLASA a XI-a

H1

Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. (20p) Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Demonstrați că:

- a) **(7p)** $\det(A - xI_2) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$;
- b) **(6p)** $\det(A - I_2) + \det(A + I_2) \in \mathbb{N}$;
- c) **(7p)** ecuația $X \cdot A - A \cdot X = A$ nu are soluții în $M_2(\mathbb{R})$.

Propunător, prof. Doina Iuliana Puiu, Siret

Barem:

1.a)	$A - xI_2 = \begin{pmatrix} -x & 1 \\ -2 & \sqrt{3} - x \end{pmatrix}$ $\det(A - xI_2) = x^2 - \sqrt{3}x + 2 =$ $= \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>3p</p>
1.b)	$\det(A - I_2) = 3 - \sqrt{3}$ $\det(A + I_2) = 3 + \sqrt{3}$ $\det(A - I_2) + \det(A + I_2) = 6 \in \mathbb{N}$	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
1.c)	<p>Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ astfel încât $X \cdot A - A \cdot X = A$. Prin calcul se obține</p> $\begin{pmatrix} -2b - c & a + b\sqrt{3} - d \\ -2d + 2a - c\sqrt{3} & c + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ <p>Din $-2b - c = 0$ și $c + 2b = \sqrt{3}$ se obține $0 = \sqrt{3}$, imposibil</p> <p>În concluzie, ecuația nu are soluții.</p>	<p>1p</p> <p>3p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>

2. (20p) Fie matricea $A \in M_2(\mathbb{C})$. Notăm cu $\text{Tr}(A)$ urma matricei A .

- a) **(10p)** Arătați că dacă $\text{Tr}(A) = 0$, atunci $A^2 = aI_2, a \in \mathbb{C}$.
- b) **(10p)** Demonstrați că dacă $A, B, C \in M_2(\mathbb{C})$, atunci $(AB - BA)^2 C = C(AB - BA)^2$.

Propunător, prof. Petru Daniel Uhliuc, Cîmpulung Moldovenesc

Barem:

2.a)	<p>Fie $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $Tr(A) = x + t$. Cum $Tr(A) = 0 \Rightarrow x + t = 0$</p> <p>$A^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + ty \\ xz + tz & x^2 + yz \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & y(x+t) \\ z(x+t) & x^2 + yz \end{pmatrix}$</p> <p>$\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & 0 \\ 0 & x^2 + yz \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = (x^2 + yz)I_2$</p> <p>Cum $x, y, z \in \mathbb{C}$, notând $a = x^2 + yz$, atunci $\exists a \in \mathbb{C}$ pentru care $A^2 = aI_2$.</p>	<p>2p</p> <p>4p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
2.b)	<p>Fie $A = \begin{pmatrix} x_A & y_A \\ z_A & t_A \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x_B & y_B \\ z_B & t_B \end{pmatrix}$. Atunci</p> <p>$AB - BA = \begin{pmatrix} x_A x_B + y_A z_B - x_B x_A - y_B z_A & x_A y_B + y_A t_B - x_B y_A - y_B t_A \\ z_A x_B + t_A z_B - z_B x_A - t_B z_A & z_A y_B + t_A t_B - z_B y_A - t_B t_A \end{pmatrix}$</p> <p>$\Leftrightarrow AB - BA = \begin{pmatrix} y_A z_B - y_B z_A & x_A y_B + y_A t_B - x_B y_A - y_B t_A \\ z_A x_B + t_A z_B - z_B x_A - t_B z_A & z_A y_B - z_B y_A \end{pmatrix}$</p> <p>$\Rightarrow Tr(AB - BA) = y_A z_B - y_B z_A + z_A y_B - z_B y_A = 0$.</p> <p>Conform a) obținem $(AB - BA)^2 = aI_2$,</p> <p>de unde $(AB - BA)^2 \cdot C = aI_2 \cdot C = a \cdot C$, iar $C \cdot (AB - BA)^2 = C \cdot aI_2 = a \cdot C$,</p> <p>Astfel, egalitatea este adevărată.</p>	<p>3p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>

3. (20p) Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 2x + m}$, $m \in \mathbb{R}$.

- a) **(5p)** Stabiliți dacă funcția admite asimptotă orizontală la $-\infty$. În caz afirmativ precizați asimptota.
- b) **(15p)** Determinați valoarea parametrului real m , pentru care graficul funcției admite o singură asimptotă verticală.

Propunător, prof. Niculina-Mihaela Moisuc, Rădăuți

Barem:

3.	<p>a) $y = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 2x + m} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{m}{x^2}\right)} = 1$</p> <p>deci $y = 1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$</p>	<p>4</p> <p>1</p>
	<p>b) Observăm $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 2x + m} = \frac{(x-4)(x+1)}{x^2 + 2x + m}$</p> <p>și se iau în discuție cazurile:</p> <p>$x = 4$ rădăcină a numitorului $\Rightarrow m = -24$;</p> <p>$x = -1$ rădăcină a numitorului $\Rightarrow m = 1$;</p>	<p>2p</p> <p>4p</p> <p>4p</p>

numitorul are rădăcină dublă $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Rightarrow m = 1$, astfel, soluția problemei este $m \in \{-24, 1\}$.	4p 1p
--	----------

4. (30p) O echipă de cercetători constată că starea calorică a unei anumite substanțe se modifică în timp după legea $T(t) = \sqrt{t^2 + at + b} - ct + 5$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ sunt constante și în care $T(t)$ este temperatura, măsurată în grade la momentul $t \geq 0$, t reprezintă numărul de secunde scurs de la începutul experimentului.

a) **(10p)** Pentru $a = 6, b = 2, c = 1$, stabiliți dacă este posibil ca la un moment al experimentului temperatura substanței să fie $0^\circ C$.

b) **(20p)** Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ știind că $T(1) = 7$ și $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = 8$.

Propunător, prof. Doina Iuliana Puiu, Siret

4.a)	$T(t) = \sqrt{t^2 + 6t + 2} - t + 5$	1p
	$T(t) = 0 \Rightarrow \sqrt{t^2 + 6t + 2} = t - 5$	2p
	Rezolvând ecuația se obține $t = \frac{23}{16}$, dar $\frac{23}{16} - 5 < 0$, ecuația nu are soluție, deci nu este	6p
	posibil ca temperatura substanței să fie $0^\circ C$ în nici un moment al experimentului.	1p
4.b)	$T(1) = 7 \Rightarrow \sqrt{a + b + 1} = c + 2$	4p
	$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = 8 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 + at + b} - ct) = 3$	3p
	Este necesar ca $c > 0$	2p
	$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1 - c^2)t^2 + at + b}{\sqrt{t^2 + at + b} + ct} = 3$	5p
	Cum $1 - c^2 = 0$ și $c > 0$ se obține $c = 1$.	2p
	Din $\frac{a}{1 + c} = 3 \Rightarrow a = 6$	2p
	$b = 2$	2p