

Barem de corectare OLM 2026 Clasa a X-a

P1

$z_A + z_C = 10, z_A + z_B + z_C = 22 + 5i \Rightarrow z_B = 12 + 5i$, unde z_A, z_B, z_C sunt afixele punctelor A, B, C	7,5p
$OA = OB = z_B = 13$, unde O de afix 0 este centrul cercului circumscris triunghiului ABC și $OM \perp AC$ se obțin $z_A = 5 + yi, z_C = 5 - yi$, unde $y \in \mathbb{R}$	7,5p
$z_A = 5 + 12i, z_C = 5 - 12i$ sau $z_C = 5 + 12i, z_A = 5 - 12i$	7,5p

P2

$ z_1 - z_2 ^2 + z_2 - z_3 ^2 + z_3 - z_1 ^2 + z_1 + z_2 + z_3 ^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) + (z_2 - z_3)(\overline{z_2 - z_3}) +$ $+ (z_3 - z_1)(\overline{z_3 - z_1}) + (z_1 + z_2 + z_3)(\overline{z_1 + z_2 + z_3}) =$	11p
$= 3(z_1 ^2 + z_2 ^2 + z_3 ^2) = 18$	8,5p
$ z_1 - z_2 ^2 + z_2 - z_3 ^2 + z_3 - z_1 ^2 = 12$	3p

P3

a) Notăm $\log_{11} 2 = t > 0$ și arătăm că $3t + 1 > \sqrt{2t^2 + t + 3}$	4,5p
$7t^2 + 5t - 2 > 0 \Leftrightarrow t > \frac{2}{7}$, deci $\log_{11} 2 > \frac{2}{7}$	4,5p
$2 > 11^{\frac{2}{7}} \Leftrightarrow 2^7 > 11^2$ adevărat	3,5p
b) $\frac{a}{b} = 10 \sqrt{\frac{x+1}{x+3} \cdot \frac{x+2}{x}}$, unde $x = 2023$	5p
Cum $\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow a > b$	5p

P4 autor Octavian Purcaru (GM 9/2025)

a) Se consideră $f_1(x) = b - \sqrt{b^2 - ax^3}$ pentru $x < 0$ și $f_2(x) = -b + \sqrt{b^2 + ax^3}$ pentru $x \geq 0$; Pentru orice $x_1 < x_2, x_1, x_2 < 0 \Rightarrow f_1(x_1) < f_2(x_2)$, deci funcția f_1 este strict crescătoare Pentru $x < 0 \Rightarrow x^3 < 0 \Rightarrow -ax^3 > 0 \Rightarrow \sqrt{b^2 - ax^3} > b \Rightarrow b - \sqrt{b^2 - ax^3} < 0$ și obținem $\text{Im } f_1 = (-\infty, 0)$ Analog funcția f_2 este strict crescătoare și $\text{Im } f_2 = [0, +\infty)$	7p
$\text{Im } f_1 \cap \text{Im } f_2 = \emptyset$, funcția f este injectivă, $\text{Im } f_1 \cup \text{Im } f_2 = \mathbb{R} \Rightarrow$ funcția f este surjectivă, deci f bijectivă	5,5p
b) Cum f și f^{-1} sunt diferite și simetrice față de prima bisectoare, valorile lor comune aparțin dreptei de ecuație $y = x$. Ecuația dată se reduce la $f(x) = x$	5p
Soluțiile sunt $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 8ab}}{2a}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 8ab}}{2a}, x_3 = 0$	5p