

Barem de corectare OLM 2026 Clasa a XI-a
P1 – autor Doru Isac

a) Pentru $x \in [n; n+1)$ ecuația devine $\{x\}^2 - n\{x\} + n = 0$, deoarece $[x] = n$	5p
$\{x\} = \frac{\sqrt{n^2 + 4n} - n}{2} \in [0; 1) \Rightarrow x_n = \frac{\sqrt{n^2 + 4n} + n}{2} \in [n; n+1)$ soluție unică	7,5p
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n} - n}{2}$	6p
$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2(\sqrt{n^2 + 4n} + n)} = 1$	4p

P2

a) $A + I_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + I_n)^2 = n(A + I_n) \Rightarrow A^2 + 2A + I_n = nA + nI_n \Rightarrow$	7p
$A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n, \forall n \geq 2$	5,5p
b) Din $A^2 + (2-n)A = (n-1)I_n, \forall n \geq 2 \Rightarrow A(A + (2-n)I_n) = (A + (2-n)I_n)A = (n-1)I_n$	5p
$A \cdot \left(\frac{1}{n-1}A + \frac{2-n}{n-1}I_n \right) = \left(\frac{1}{n-1}A + \frac{2-n}{n-1}I_n \right) \cdot A = I_n \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{n-1}A + \frac{2-n}{n-1}I_n, \forall n \geq 2$	5p

P3 – S:L 25.271 & S:L 25.272 (adaptate)

a) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^3 - 1}{(n+1)^3 + 1} < 1, \forall n \geq 2 \Rightarrow (x_n)_{n \geq 2}$ strict descrescător	5p
$(x_n)_{n \geq 2}$ strict descrescător $\Rightarrow x_n \leq x_2 = \frac{7}{9}, \forall n \geq 2 \Rightarrow (x_n)_{n \geq 2}$ mărginit superior (1) $x_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} > 0, \forall n \geq 2 \Rightarrow (x_n)_{n \geq 2}$ mărginit inferior (2) $\stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow}$ șirul $(x_n)_{n \geq 2}$ este mărginit	5p
b) $x_n = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{(k+1)(k^2 - k + 1)} = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} \cdot \prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1} = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{3}$	7p
$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)} = \frac{2}{3}$	5,5p

P4 – Mircea Brodețchi

a) $\det(X^n) = -1000$	3p
$(\det(X))^n = -1000 \Rightarrow \det(X) = -\sqrt[n]{1000}, (\forall) n > 2$ natural impar	7p
b) Presupunem că există $X \in M_2(R)$ cu $X^5 + X = A \cdot {}^t A \Rightarrow X(X^4 + I_2) = A \cdot {}^t A$	4p
$\Rightarrow \det(X(X^4 + I_2)) = \det(A \cdot {}^t A) \Rightarrow \det X \cdot \det(X^4 + I_2) = (\det A)^2$	3,5p
$X^4 + I_2 = (X^2 + iI_2)(X^2 - iI_2) \Rightarrow \det(X^4 + I_2) = \det(X^2 + iI_2) \cdot \det(X^2 - iI_2) = \left \det(X^2 + iI_2) \right ^2 \geq 0$	3p
Deoarece $\det(X) < 0 \Rightarrow \det(X^5 + X) \leq 0$ în contradicție cu $\det^2(A) > 0$, A fiind inversabilă, deci presupunerea este falsă	2p