

Barem de corectare OLM 2026 Clasa a XII-a

P1 – autor Nicolae Bourbăcuț (GM 10/2025)

$ F'(t) \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}} \forall t < 1 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-t}} \leq F'(t) \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}}$	7p
Integrăm pe $[x, y]$, unde $x < y < 1$. Rezultă că $ F(x) - F(y) \leq \left \int_x^y \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt \right = 2\sqrt{1-t} \Big _x^y = 2 \sqrt{1-y} - \sqrt{1-x} $	10p
Se arată că $\sqrt{1-x} - \sqrt{1-y} \leq \sqrt{y-x}$, deci $ F(x) - F(y) \leq 2\sqrt{ x-y }$, $\forall x, y < 1$	5,5p

P2-autor Prof. Livia Băcilă

$f_n(x) - f_{n-1}(x) = \frac{x^n}{n!}$	4,5p
Dar $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$	4p
$(f_n - f_n')(x) = \frac{x^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x^n = n!(f_n - f_n')(x)$	4p
$\int \frac{x^n e^x}{f_n^2(x) + e^{2x}} dx = n! \int \frac{f_n(x) - f_n'(x)}{f_n^2(x) + e^{2x}} e^x dx = n! \int \frac{f_n(x)e^x - f_n'(x)e^x}{f_n^2(x)} \cdot \frac{f_n^2(x)}{f_n^2(x) + e^{2x}} dx =$ $= n! \int \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x}{f_n(x)}\right)^2} \cdot \left(\frac{e^x}{f_n(x)}\right)' dx = n! \arctg \frac{e^x}{f_n(x)} + C$	10p

P3-manual

a) Arătăm că funcția este injectivă, fie calculând toate valorile și observând că acestea sunt distincte, fie astfel: Dacă $f(\hat{x}) = f(\hat{y}) \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$ și $\tilde{x} = \tilde{y} \Rightarrow x - y : 2$ și $x - y : 3$ de unde $x - y : 6 \Rightarrow \hat{x} = \hat{y}$	9p
Cum f este injectivă și acționează între mulțimi cu același cardinal, rezultă că este și surjectivă	3,5p
b) $G = \{f^{-1}(\bar{0}, \tilde{0}), f^{-1}(\bar{0}, \tilde{1}), f^{-1}(\bar{0}, \tilde{2})\} = \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{2}\}$	5p
Pentru a arăta că este grup este suficient să arătăm că este parte stabilă a lui Z_6 în raport cu „+”	5p

P4

Fie $Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx, \forall y \in G\}$ = centrul lui G . Problema cere să arătăm că $Z(G) = \{e\}$	4,5p
Cum $Z(G)$ este un subgrup al lui $G \Rightarrow Z(G) \in \{1, 2, 1013, 2026\}$	4,5p
Cum G este necomutativ $\Rightarrow \exists z \in G \setminus Z(G)$. Considerăm mulțimea $C(z) = \{y \in G \mid zy = yz\}$ = centralizatorul lui z . Se știe că $C(z)$ este subgrup al lui $G \Rightarrow C(z) \in \{1, 2, 1013, 2026\}$	4,5p
Dar $Z(G) < C(z) \leq G \Rightarrow Z(G) \text{ divide } C(z) $	4p
Dacă $ Z(G) \in \{2, 1013\} \Rightarrow C(z) = 2026 \Rightarrow C(z) = G \Rightarrow z \in Z(G)$. Contradicție	5p