

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 7.02.2026
Clasa a XII-a

1.(22,5p) Fie $f : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive, cu proprietatea că $|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, pentru orice $x < 1$. Arătați că pentru orice primitivă F a lui f avem

$$|F(x) - F(y)| \leq 2\sqrt{|x - y|}, \quad \forall x, y < 1.$$

2.(22,5p) Se dau funcțiile $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați

$$\int \frac{x^n e^x}{f_n^2(x) + e^{2x}} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Se consideră funcția $f : Z_6 \rightarrow Z_2 \times Z_3$, $f(\hat{x}) = (\bar{x}, \tilde{x})$, unde \hat{x} este clasa lui x modulo 6, \bar{x} este clasa lui x modulo 2 și \tilde{x} este clasa lui x modulo 3.

a) (12,5p) Arătați că f este surjectivă.

b) (10p) Dacă $G = \{f^{-1}(\bar{0}, \tilde{x}) \mid \tilde{x} \in Z_3\}$, arătați că $(G, +)$ este grup.

4.(22,5p) Fie G un grup necomutativ cu 2026 elemente și $x \in G$ un element care satisface condiția $xy = yx, \forall y \in G$. Arătați că $x = e$, unde e este elementul neutru al grupului.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Țimp efectiv de lucru: 3 ore.