

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ, 7.02.2026  
Clasa a XI-a

1. Se consideră ecuația  $[x] = x\{x\}$ , unde  $x \in \mathbb{R}$ , iar  $[x]$  și  $\{x\}$  reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real  $x$ .

a) (12,5p) Arătați că pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$ , intervalul  $[n; n+1)$  conține o unică soluție  $x_n$  a ecuației.

b) (10p) Determinați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\}$ .

2. Se consideră matricea  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,n \\ j=1,n}}$ ,  $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } i = j \\ 1, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$ .

a) (12,5p) Arătați că  $A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n$ ,  $\forall n \geq 2$ .

b) (10p) Determinați inversa matricei  $A$ .

3. Fie  $(x_n)_{n \geq 2}$  un șir de numere reale definit prin:  $x_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$ ,  $n \geq 2$ .

a) (10p) Studiați monotonia și mărginirea șirului  $(x_n)_{n \geq 2}$ .

b) (12,5p) Determinați  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

4. Se consideră matricea  $X \in M_2(\mathbb{R})$ , cu proprietatea că există un număr natural  $n$  impar,  $n > 2$ , astfel încât

$$X^n = \begin{pmatrix} -12 & 11 \\ 44 & 43 \end{pmatrix}.$$

a) (10p) Calculați  $\det(X)$ .

b) (12,5p) Dacă  $A \in M_2(\mathbb{R})$  este o matrice inversabilă, arătați că nu există nicio matrice  $X \in M_2(\mathbb{R})$  cu proprietatea din enunț care să verifice relația  $X^5 + X = A \cdot {}^t A$ , unde  ${}^t A$  este matricea transpusă matricei  $A$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.