

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 7.02.2026
Clasa a X-a

1. (22,5p) În triunghiul ABC se consideră punctul G centrul de greutate de afix $z_G = \frac{22+5i}{3}$, punctul M mijlocul laturii AC de afix $z_M = 5$ și punctul O centrul cercului circumscris triunghiului ABC cu afixul $z_O = 0$. Determinați afixele punctelor A, B și C .

2. (22,5p) Se consideră numerele complexe z_1, z_2, z_3 care îndeplinesc condițiile $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \sqrt{2}$ și $|z_1 + z_2 + z_3| = \sqrt{6}$. Calculați $|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2$.

3. a) (12,5p) Arătați că $\log_{11} 8 + 1 > \sqrt{2 \log_{11}^2 2 + \log_{11} 2 + 3}$.

b) (10p) Comparați numerele $a = \sqrt[10]{\frac{2024}{2026}}$ și $b = \sqrt[10]{\frac{2023}{2025}}$.

4. Pentru a, b numere reale, $a, b > 0$ se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} b - \sqrt{b^2 - ax^3}, & x < 0 \\ -b + \sqrt{b^2 + ax^3}, & x \geq 0 \end{cases}$.

a) (12,5p) Arătați că funcția f este bijectivă.

b) (10p) Rezolvați ecuația $f(x) = f^{-1}(x)$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.