

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 7.02.2026
Clasa a VII-a

1. Se consideră următoarele numere reale: $a = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$ și

$$b = \left(\left| 3^{51} - 2^{85} \right| + 3^{2011} : 81^{490} \right) : (-4^{41}) + \sqrt{1296} + \sqrt{(8-5\sqrt{3})^2} - \sqrt{75} + \sqrt{2^8}.$$

a) (17p) Comparați numerele a și b .

b) (5,5p) Verificați dacă mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+1}{2x-5} \in \mathbb{Z} \right\}$ conține elementele $3a$ și \sqrt{b} .

2. a) (12,5p) Arătați că $\sqrt{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} - 1} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, oricare ar fi n număr natural, $n \geq 2$.

b) (10p) Știind că $\frac{2026}{x+1} + \frac{2026}{y+2} + \frac{2026}{z+3} = 2025$, unde $x \neq -1, y \neq -2, z \neq -3$, calculați valoarea numărului

$$t = \frac{x-1}{x+1} + \frac{y}{y+2} + \frac{z+1}{z+3}.$$

3. Trapezul isoscel $ABCD$ are bazele $AB = 36$ cm și $CD = 18$ cm, iar laturile neparalele AD și BC sunt egale cu 15 cm. Se consideră punctul O mijlocul diagonalei BD , iar dreapta AO intersectează dreptele BC și DC în punctele G , respectiv E .

a) (9,5p) Demonstrați că patrulaterul $ABED$ este un paralelogram.

b) (13p) Calculați aria patrulaterului $DCGO$.

4. (22,5p) În triunghiul ascuțitunghic ABC se construiesc înălțimile AD și BE , $D \in BC$, $E \in AC$ și se notează cu H punctul lor de intersecție. Demonstrați că simetricul punctului H față de punctul M , mijlocul laturii BC , aparține cercului circumscris triunghiului ABC .

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.