

Barem de corectare OLM 2026 Clasa a IX-a

P1 – autor Mircea Brodețchi

a) $E(3) = [3] + \left[\frac{16}{3}\right] + \left[\frac{25}{3}\right] = 3 + 5 + 8 = 16$	3p
$E(4) = \left[\frac{16}{3}\right] + \left[\frac{25}{3}\right] + [12] = 5 + 8 + 12 = 25$	3p
$E(5) = \left[\frac{25}{3}\right] + [12] + \left[\frac{49}{3}\right] = 8 + 12 + 16 = 36$	3p
$\Rightarrow E(3) + E(4) + E(5) = 77$	1p
b) $E(3k) = (3k+1)^2, (\forall) k \in N; E(3k+1) = (3k+2)^2, (\forall) k \in N; E(3k+2) = (3k+3)^2, (\forall) k \in N$	5p
Deci, $E(n) = (n+1)^2, (\forall) n \in N$	4p
Din $(n+1)^2 = (2n)^2$ obținem $n=1$ care convine și $n = -\frac{1}{3}$ care nu convine	3,5p

P2- b) autor Alin Pop

a) $P(n): 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}; P(1): 1 = 1$, adevărat	2p
Fie $n \geq 1$. Presupunem $P(n)$ adevărată; $P(n+1): 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}, (\forall) n \in N^*$	3p
Demonstrarea $P(n+1)$ și concluzie	5p
b) Arătăm că există $k \in N$ astfel încât: $(k+1) + (k+2) + \dots + (k+n) = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$	3,5p
$\Leftrightarrow nk + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \Leftrightarrow k = \frac{(n+1)(n^2+n-2)}{4}$	4p
Întrucât n este impar rezultă $n+1$ par	3p
$n^2 + n - 2 = n(n+1) - 2$ par, deci $k \in N$	2p

P3

Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \leq \frac{(b-a)^2}{8a} \Leftrightarrow$	5,5p
$\Leftrightarrow 4a(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2 \leq (b-a)^2$	5p
$\Leftrightarrow 4a(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2 \leq (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2(\sqrt{b}+\sqrt{a})^2$	5p
$\Leftrightarrow (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2 \left[(\sqrt{b}+\sqrt{a})^2 - 4a \right] \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{b}-\sqrt{a})^3 (\sqrt{b}+3\sqrt{a}) \geq 0$, adevărat pentru orice $b \geq a > 0$	7p

P4 autor Traian Preda (GM 9/2025)

$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \quad (1)$	5,5p
D centrul de greutate $\triangle AEO \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$	4,5p
C centrul de greutate $\triangle BFO \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$	4p
Scăzând relațiile precedente și ținând cont de (1) obținem: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$	4,5p
$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ rezultă $ABCD$ paralelogram	4p