

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ, 7.02.2026  
Clasa a IX-a

1. Fie  $E(n) = \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(n+2)^2}{3} \right\rfloor$ , unde  $[x]$  reprezintă partea întreagă a numărului  $x$ , iar  $n$  este număr natural.

a)(10p) Calculați  $E(3) + E(4) + E(5)$ .

b)(12,5p) Determinați  $n \in \mathbb{N}$  care verifică relația  $E(n) = E(2n-1)$ .

2. a)(10p) Arătați că:  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ .

b)(12,5p) Dacă  $n$  este un număr natural impar, arătați că există numerele naturale consecutive  $a_1, a_2, \dots, a_n$  astfel încât:  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ .

3. (22,5p) Dacă  $0 < a \leq b$  arătați că:  $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{(b-a)^2}{8a}$ .

4. (22,5p) Fie  $ABCD$  un patrulater convex și  $O$  intersecția diagonalelor acestuia. În exteriorul său se consideră punctele  $E$  și  $F$  astfel încât punctele  $D$  și  $C$  sunt centrele de greutate ale triunghiurilor  $AEO$  și  $BFO$ . Știind că  $\overrightarrow{EF} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$ , arătați că  $ABCD$  este paralelogram.

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.