



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ Etapa locală, SĂLAJ, 9.02.2026

VIII. osztály

1 Tétel

Adott a következő kifejezés:

$$E(x) = (5x + 2)^2 - (4x - 3)^2 - (3x + 4)(3x - 4) - 3(16x - 3), \text{ ahol } x \text{ valós szám.}$$

(11p) a) Igazold, hogy $E(x) = -4x + 20$, bármely x valós szám esetén.

(10p) b) Határozd meg az a szám egész értékeit, amelyekre $\sqrt{(E(a))^2} \leq 12$.

2 Tétel

(11p)a) Ha $x \in [-2, \infty)$ és $y \in [-2, \infty)$ akkor igazold, hogy az $A = xy + 2x + 2y$ szám eleme a $[-4, \infty)$ intervallumnak.

(10p)b) Igazold, hogy $\frac{1}{2\sqrt{a}} < \sqrt{a} - \sqrt{a-1}$, ahol $a \in \mathbb{N}^*$.

3 Tétel

Adott ABCD szabályos háromoldalú gúla, melynek alapja a BCD egyenlő oldalú háromszög. Az alapél hossza 12 cm, az oldalél hossza $AB = 6\sqrt{2}$ cm. Az M és N pontok a BC és CD élek felezőpontjai.

(7p)a) Igazold, hogy az ABD háromszög derékszögű.

(7p)b) Határozd meg az AM és DN egyenesek által alkotott szög mértékét.

(7p)c) Legyen B' és D' az AB és AD élek felezőpontjai. Számítsd ki a $MND'B'$ négyszög területét.

4 Tétel

Az ABCD tetraéderben jelöljük M, N, P, Q -val az AD, AB, BC és CD élek felezőpontjait. Tudva, hogy $\sphericalangle(AC, BD) = 90^\circ$.

(11p) a) Igazold, hogy $\sphericalangle MNP = 90^\circ$.

(10p) b) Ha $AC = BD$, akkor igazold, hogy $MNPQ$ négyzet.

Munkaidő: 3 óra.

Minden tétel 21 pontot ér. Hivatalból 16 pont jár.