

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - SĂLAJ – 9.02.2026
BAREM DE NOTARE

Clasa a VI-a

Subiectul 1

12p) a) Determinați numerele naturale a și b , știind că $[a, b] - (a, b) = 176$ și

$$\frac{[a, b]}{(a, b)} = 45.$$

9p) b) Aflați numerele \overline{abc} pentru care $\frac{\overline{ab}}{5} = \frac{\overline{ca}}{3} = \frac{a^4}{4}$.

Soluție

$$[a, b] = 45 \cdot (a, b), 45(a, b) - (a, b) = 176 \Rightarrow 44 \cdot (a, b) = 176 \dots\dots\dots 3p$$

$$(a, b) = 4, [a, b] = 180, [a, b] \cdot (a, b) = ab \Rightarrow ab = 720 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Dar } 4 \mid a \Rightarrow a = 4x, 4 \mid b \Rightarrow b = 4y, \text{ cu } (x, y) = 1 \dots\dots\dots 3p$$

$$\Rightarrow \text{Prin înmulțirea relațiilor că } ab = 4x \cdot 4y$$

$$\Rightarrow 720 = 16xy \mid :16$$

$$\Rightarrow xy = 45 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{I. } x=1 \quad ; \quad \text{II. } x=5$$

$$y = 45 \quad y = 9 \quad \text{și invers} \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow a = 4 \quad a = 20$$

$$b = 180 \quad ; \quad b = 36 \quad \text{și invers} \dots\dots\dots 1p$$

$$S = (a, b) = \{(4, 180), (20, 36), (36, 20), (180, 4)\}$$

$$\text{b) } \frac{\overline{ab}}{5} = \frac{a^4}{4} \Rightarrow \overline{ab} = \frac{5a^4}{4} \in \mathbb{N} \Rightarrow 4 \mid 5a^4$$

Cum a este cifra nenula pară $\Rightarrow a$ poate fi : 2, 4, 6, 8. 3p

$$\text{Pt. } a=2 \Rightarrow \overline{ab} = 20$$

Pt $a=4 \Rightarrow \overline{ab} = 320$ (nu convine).....3p

\Rightarrow pt. $a \geq 4$ nu avem soluții

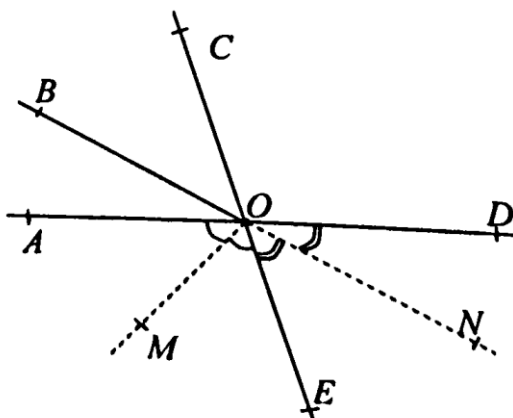
\Rightarrow pt $a=2$ obținem $\overline{abc} = 201$3p

Subiectul 2

Fie A, O, D trei puncte coliniare. De aceeași partea dreptei AD considerăm punctele B, C astfel încât măsurile unghiurilor $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ să fie direct proporționale cu numerele 7, 9 și 20.

- Calculați măsurile unghiurilor $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$.
- Dacă [OE este semidreapta opusă semidreptei [OC, iar [OM, [ON sunt bisectoarele unghiurilor $\angle AOE$, respectiv $\angle DOE$, determinați măsura unghiului $\angle MON$.

Soluție:



a) Din datele problemei $\frac{\angle AOB}{7} = \frac{\angle BOC}{9} = \frac{\angle COD}{20} = k$3p

Obținem $\angle AOB = 7k$, $\angle BOC = 9k$, $\angle COD = 20k$3p

Din A, O, D puncte coliniare $\angle AOD = 180^\circ$, de unde $7k + 9k + 20k = 180^\circ$, deci $k = 5^\circ$3p

$\angle AOB = 35^\circ$, $\angle BOC = 45^\circ$, $\angle COD = 100^\circ$3p

b) [OE este semidreapta opusă semidreptei [OC $\Rightarrow \angle EOC = 180^\circ$2p

[OM bis. $\angle AOE \Rightarrow \angle AOM \equiv \angle MOE$, $\angle AOM = \angle MOE = \frac{\angle AOE}{2}$2p

[ON bis. $\sphericalangle DOE \Rightarrow \sphericalangle DON \equiv \sphericalangle EON$, $\sphericalangle DON = \sphericalangle EON = \frac{\sphericalangle DOE}{2}$ 2p

$\sphericalangle AOE$, $\sphericalangle DOE$ sunt unghiuri adiacente suplementare.....2p

Deci $\sphericalangle MON = 90^\circ$ 1p

Subiectul 3.

Demonstrați că numărul

$N = 3^3 + 7^5 + 11^7 + \dots + 4047^{2025}$ este divizibil cu 12.

Gazeta Matematică nr.11/2025

Soluție

$N = (4 \cdot 1 - 1)^{2 \cdot 1 + 1} + (4 \cdot 2 - 1)^{2 \cdot 2 + 1} + (4 \cdot 3 - 1)^{2 \cdot 3 + 1} + \dots + (4 \cdot 1012 - 1)^{2 \cdot 1012 + 1}$,
deci avem 1012 termeni3p

Folosim proprietatea $(a-1)^{2k+1} = M_a - 1$, unde a, k numere naturale, a nenul

$N = M_4 - 1 + M_4 - 1 + M_4 - 1 + \dots + M_4 - 1$ 5p
 $= M_4 - 1012 = M_4$, deci $N : 4$ 2p

Se observă că numerele 3, 7, 11, ..., 4047 pot fi grupate câte 3, în fiecare grupă având M_3 , $M_3 + 1$ și $M_3 - 1$, prin urmare se formează 337 grupe și 4047 rămâne la final..... 2p

$(M_3)^{2k+1} = M_3$, $(M_3 + 1)^{2k+1} = M_3 + 1$, $(M_3 - 1)^{2k+1} = M_3 - 1$ 3p

$N = (M_3 + M_3 + 1 + M_3 - 1) \cdot 337 + 4047^{2025}$ 2p

$N = M_3 \cdot 337 + (M_3)^{2025} = M_3$, deci $N : 3$ 2p

Din $N : 4$, $N : 3$ și $(3, 4) = 1$, rezultă $N : 12$ 2p



Subiectul 4

Aflați măsurile unghiurilor $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ și $\angle DOA$ situate în jurul punctului O care îndeplinesc condițiile $3\angle AOB = 4\angle COD$, $4\angle AOC = 5\angle BOD$ și $\angle AOD = 7\angle BOC$.

Soluție

Se notează $\angle AOB = x$, $\angle BOC = y$, $\angle COD = z$, $\angle AOD = t$2 p
 $x + y + z + t = 360^\circ$ 2 p
 $3x = 4z$, $4(x + y) = 5(y + z)$, $t = 7y$4 p
Din $4(x + y) = 5(y + z)$, adică $4x = y + 5z$ și din $3x = 4z$ se ajunge la $z = 3y$
și $x = 4y$ 6p
Cum $x + 8y + z = 360^\circ$, se calculează $y = \angle BOC = 24^\circ$ 4p
 $x = \angle AOB = 96^\circ$, $z = \angle COD = 72^\circ$ și $t = \angle AOD = 168^\circ$ 3p