

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - SĂLAJ - 9.02.2026

BAREM DE NOTARE

Clasa a VII-a

Subiectul 1

(11p) a) Fie x, y numere reale strict pozitive. Folosind relația $\frac{2}{\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, arătați că:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \leq \frac{11}{6}$$

(10p) b) Determinați suma numerelor naturale \overline{ab} pentru care numărul

$$x = \sqrt{2\overline{ba} + a + \overline{ab} - 8b}$$
 este număr natural;

Soluție :

a) $\frac{2}{\sqrt{2}} \leq 1 + \frac{1}{2}$ 3p

$\frac{2}{\sqrt{3}} \leq 1 + \frac{1}{3}$ 3p

$\frac{2}{\sqrt{2 \cdot 3}} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 3p

Prin adunarea celor trei relații și împărțirea la 2, se obține relația cerută.....2p

b) $2\overline{ba} + a + \overline{ab} - 8b = 13 \cdot (a + b)$ 3p

$$\sqrt{13 \cdot (a + b)} \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$a+b=13$ 3p

$(a, b) =$

$\{(4,9); (5,8); (6,7); (7,6); (8,5); (9,4)\}$ 2p

$S = 48 + 58 + 67 + 76 + 85 + 94 =$

4292p

Subiectul 2

(11p) a) Calculați $a = \sqrt{2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 50) \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{50 \cdot 51} \right)}$

(10 p) b) Fie a și b două numere raționale, astfel încât $1 \leq a \leq 3$ și $-3 \leq b \leq 1$. Arătați că

expresia $E = \sqrt{(2a + b - 7)^2} + |a - b| + \sqrt{(a + 2b + 5)^2}$, nu depinde de a și de b

Soluție :

$$a) \quad a = \sqrt{2 \cdot \frac{51 \cdot 50}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{50} - \frac{1}{51} \right)} \quad \dots\dots\dots 6p$$

$$a = \sqrt{51 \cdot 50 \cdot \frac{50}{51}} = 50 \quad \dots\dots\dots 5p$$

$$b) \quad E = |2a + b - 7| + |a - b| + |a + 2b + 5| \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$1 \leq a \leq 3 \Rightarrow 2 \leq 2a \leq 6 \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Dar } -3 \leq b \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 2a + b \leq 7 \Rightarrow -8 \leq 2a + b - 7 \leq 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$-3 \leq b \leq 1 \Rightarrow -6 \leq 2b \leq 2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dar } 1 \leq a \leq 3 \Rightarrow -5 \leq a + 2b \leq 5 \Rightarrow 0 \leq 2a + b + 5 \leq 10 \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$E = -2a - b + 7 + a - b + a + 2b + 5 = 12 \quad \dots\dots\dots 1p$$

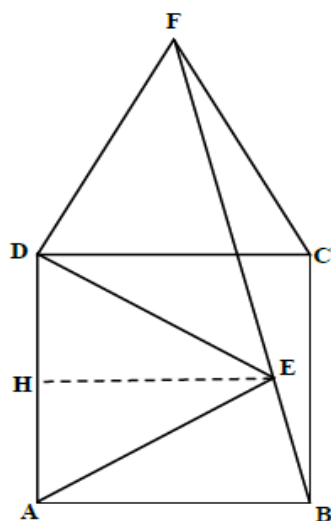
Subiectul 3

(21p) Pe laturile $[AD]$ și $[DC]$ ale pătratului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale AED și DFC , astfel încât E este în interiorul pătratului, iar F este în exteriorul pătratului.

Demonstrați că:

a) punctele B , E și F sunt coliniare;

b) punctul E este mijlocul segmentului $[BM]$, unde $\{M\} = BF \cap DC$.



.....5p

- a) $\triangle ADE$ echil $\Rightarrow \begin{cases} AE \equiv DE \equiv AD \\ \sphericalangle DEA = \sphericalangle DEA = \sphericalangle ADE = 60^\circ \end{cases}$
 $ABCD$ pătrat $\Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$
 $\sphericalangle BAE = \sphericalangle A - \sphericalangle DAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ (2p)
 $\begin{cases} AD \equiv AE \\ AD \equiv AB \end{cases} \Rightarrow \triangle ABE$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle ABE = \sphericalangle AEB = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$ (2p)
 $\sphericalangle CDE = \sphericalangle D - \sphericalangle ADE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$
 $\triangle DFC$ echilateral $\Rightarrow \begin{cases} DF \equiv DC \equiv FC \\ \sphericalangle FDC = 60^\circ \end{cases}$
 $\sphericalangle FDE = \sphericalangle FDC + \sphericalangle CDE = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ (2p)
 $\begin{cases} DF \equiv DE \\ \sphericalangle FDE = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle DFE$ drept. isos. $\Rightarrow \sphericalangle DEF = 45^\circ$ (2p)
 $\sphericalangle BEF = \sphericalangle BEA + \sphericalangle AED + \sphericalangle DEF = 75^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow B, E, F$ coliniare (2p)

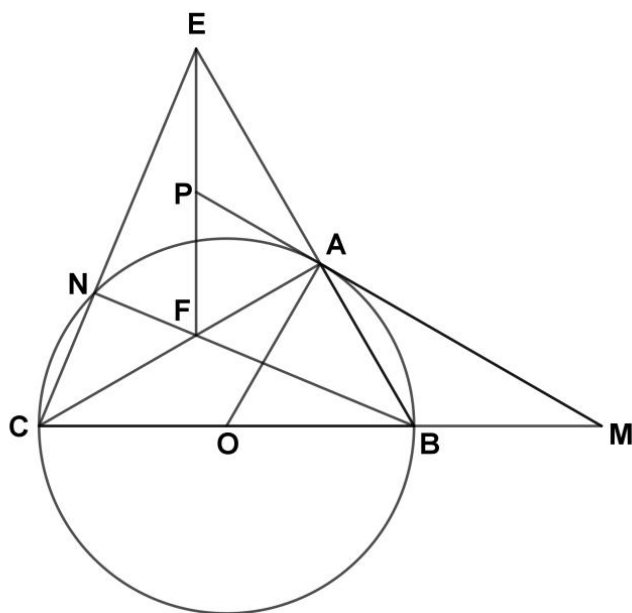
- b) Construim $EN \perp AD, N \in (AD)$.
 $\triangle AED$ echilateral $\Rightarrow EN$ înălțime, med, bisect, mediat $\Rightarrow N$ mijl. lui AD
 $\begin{cases} M \in (CD) \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow DM \parallel AB$
 $\begin{cases} DM \parallel AB \\ AD \nparallel BM \end{cases} \Rightarrow ABMD$ trapez (2p)
 $\begin{cases} EN \perp AD \\ AB \perp AD \\ DM \perp AD \end{cases} \Rightarrow EN \parallel AB \parallel MD$ (2p)
 $\begin{cases} ABMD$ trapez \\ $EN \parallel AB \parallel MD$ \\ N mijl. lui AD \end{cases} \Rightarrow EN l. m. în trapez $\Rightarrow E$ mijl. lui BM (2p)

Subiectul 4

(21p) Triunghiul ABC , $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle C = 30^\circ$, este înscris în cercul (O, r) . Tangenta în punctul A la cercul (O, r) intersectează dreapta BC în punctul M .

- a) Arătați că $BC = 2BM$;
b) Dacă N este un punct situat pe arcul mic AC , $AB \cap CN = \{E\}$, $AC \cap BN = \{F\}$, iar $EF \cap AM = \{P\}$, stabiliți natura triunghiului AFP .

Soluție :



..... 5p

a) $\angle BAC = 90^\circ \Rightarrow BC$ diametru, O mijlocul segmentului BC , $BC = 2r$2p

$\angle C = 30^\circ \Rightarrow$ arcul $AB = 60^\circ \Rightarrow \angle AOB = 60^\circ \Rightarrow \triangle AOB$ echilateral $\Rightarrow AB = r$3p

AM tangentă la cercul $(O, r) \Rightarrow OA \perp AM \Rightarrow \angle OAM = 90^\circ \Rightarrow \angle AMO = 30^\circ$ 2p

$\angle BAM = 30^\circ \Rightarrow \triangle ABM$

isoscel $\Rightarrow BM = AB = r \Rightarrow BC = 2BM$2p

b) $\angle BNC = 90^\circ$ (unghi înscris în semicerc) $\Rightarrow BN \perp EC$ 1p

În $\triangle EBC$, CA și BN înălțimi, $CA \cap BN = \{F\} \Rightarrow F$ ortocentru

$\Rightarrow EF \perp BC$2p

Fie $EF \cap BC = \{T\}$.

$EF \perp BC \Rightarrow \angle MTP = 90^\circ$, iar, din $\triangle MTP$, obținem $\angle MPT = 60^\circ$ 2p

$\angle PAF = 180^\circ - \angle CAM = 60^\circ \Rightarrow \triangle AFP$ echilateral.....2p