

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ Etapa locală, SĂLAJ, 9.02.2026

Clasa a VIII-a

Subiectul 1

Se consideră expresia:

$$E(x) = (5x + 2)^2 - (4x - 3)^2 - (3x + 4)(3x - 4) - 3(16x - 3), \text{ unde } x \text{ este număr real.}$$

(11p) a) Arată că $E(x) = -4x + 20$, pentru orice număr real x .

(10p) b) Determină valorile numărului întreg a pentru care $\sqrt{[E(a)]^2} \leq 12$.

Subiectul 2

(11p) a) Dacă $x \in [-2, \infty)$ și $y \in [-2, \infty)$ atunci numărul $A = xy + 2x + 2y$ aparține intervalului $[-4, \infty)$

(10p) b) Arătați că $\frac{1}{2\sqrt{a}} < \sqrt{a} - \sqrt{a-1}$, unde $a \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 3

Considerăm piramida triunghiulară regulată $ABCD$, a cărei bază este triunghiul echilateral BCD cu latura de 12 cm, iar muchiile laterale au lungimea $AB = 6\sqrt{2}$ cm. Fie M și N mijloacele muchiilor BC respectiv CD .

(7p) a) Demonstrați că triunghiul ABD este dreptunghic.

(7p) b) Determinați măsura unghiului format de dreptele AM și DN .

(7p) c) Fie B' și D' mijloacele muchiilor AB respectiv AD . Calculați aria patrulaterului $MND'B'$.

Subiectul 4

În tetraedrul $ABCD$ notăm cu M, N, P, Q mijloacele muchiilor AD, AB, BC respectiv CD . Se știe că $\sphericalangle(AC, BD) = 90^\circ$.

(11p) a) Arătați că $\sphericalangle MNP = 90^\circ$.

(10p) b) Arătați că, dacă $AC = BD$, atunci $MNPQ$ este pătrat.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu 21 de puncte. Se acordă 16 puncte din oficiu.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etape locală - SĂLAJ - 9.02.2026

BAREM DE NOTARE

Clasa a VIII-a

Subiectul 1

Se consideră expresia:

$$E(x) = (5x + 2)^2 - (4x - 3)^2 - (3x + 4)(3x - 4) - 3(16x - 3), \text{ unde } x \text{ este număr real.}$$

(11p) a) Arată că $E(x) = -4x + 20$, pentru orice număr real x .

(10p) b) Determină valorile numărului întreg a pentru care $\sqrt{[E(a)]^2} \leq 12$.

Soluție:

a) Arată că $E(x) = -4x + 20$, pentru orice număr real x .

$$\begin{aligned} E(x) &= (5x + 2)^2 - (4x - 3)^2 - (3x + 4)(3x - 4) - 3(16x - 3) \\ &= (25x^2 + 20x + 4) - (16x^2 - 24x + 9) - (9x^2 - 16) - 48x + 9 \dots\dots\dots 5p \\ &= 25x^2 + 20x + 4 - 16x^2 + 24x - 9 - 9x^2 + 16 - 48x + 9 \dots\dots\dots 4p \\ &= -4x + 20, \text{ pentru orice număr real } x \dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{[E(a)]^2} \leq 12 &\Leftrightarrow |-4a + 20| \leq 12 \dots\dots\dots 4p \\ -12 \leq -4a + 20 \leq 12 &\Leftrightarrow -32 \leq -4a \leq -8 \Leftrightarrow 2 \leq a \leq 8 \dots\dots\dots 3p \end{aligned}$$

Valorile întregi a care satisfac condiția sunt:

$$a \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \dots\dots\dots 3p$$

Subiectul 2

(11p) a) Dacă $x \in [-2, \infty)$ și $y \in [-2, \infty)$ atunci numărul $A = xy + 2x + 2y$ aparține intervalului $[-4, \infty)$

(10p) b) Arătați că $\frac{1}{2\sqrt{a}} < \sqrt{a} - \sqrt{a-1}$, unde $a \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

$$\begin{aligned} \text{a) } x \geq -2 \text{ și } y \geq -2 \text{ de unde se obține } x+2 \geq 0 \text{ și } y+2 \geq 0 \dots\dots\dots 5p \\ (x+2)(y+2) \geq 0 \text{ de unde } xy+2x+2y+4 \geq 0 \dots\dots\dots 4p \\ xy+2x+2y \geq -4 \text{ de unde } A \text{ aparține intervalului } [-4, \infty) \dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$

- b) $1 < 2\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{a-1})$ de unde $1 < 2a - 2\sqrt{a(a-1)}$3p
 $2\sqrt{a(a-1)} < 2a - 1$, de unde $4a(a-1) < (2a-1)^2$4p
 $4a^2 - 4a < 4a^2 - 4a + 1$2p
 $0 < 1$ este adevărat pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$1p

Subiectul 3

Considerăm piramida triunghiulară regulată ABCD, a cărei bază este triunghiul echilateral BCD cu latura de 12 cm, iar muchiile laterale au lungimea $AB = 6\sqrt{2}$ cm. Fie M și N mijloacele muchiilor BC respectiv CD.

- (7p) a) Demonstrați că triunghiul ABD este dreptunghic.
 (7p) b) Determinați măsura unghiului format de dreptele AM și DN.
 (7p) c) Fie B' și D' mijloacele muchiilor AB respectiv AD. Calculați aria patrulaterului MND' B'

Soluție:

- a) Aplică reciproca teoremei lui Pitagora $BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow m(\widehat{BAD}) = 90^\circ$ 7p
 b) Construiește MP || ND, P ∈ (BD), scrie $(\widehat{AM, DN}) = (\widehat{AM, MP}) = \widehat{AMP}$ 4p
 MP linie mijlocie, $MP = \frac{CD}{2} = 6$ cm și cum triunghiul AMP este echilateral, atunci $\widehat{AMP} = 60^\circ$ 3p
 c) În $\triangle ABD$, B'D' - linie mijlocie $\Rightarrow B'D' = 6$ cm = MN
 Demonstrează $B'D' || MN$, B'MND' paralelogram2p
 Demonstrează $B'N = MD'$, atunci B'MND' este dreptunghi2p
 În triunghiul ABC, B'M linie mijlocie $\Rightarrow B'M = 3\sqrt{2}$ cm2p
 Calculează $A = 18\sqrt{2}$ cm²1p

Subiectul 4

În tetraedrul ABCD notăm cu M, N, P, Q mijloacele muchiilor AD, AB, BC respectiv CD. Se știe că $\angle(AC, BD) = 90^\circ$.

- (11p) a) Arătați că $\angle MNP = 90^\circ$.
 (10p) b) Arătați că, dacă $AC = BD$, atunci MNPQ este pătrat.



Soluție:

- a) MN linie mijlocie în $\triangle ABD \Rightarrow MN \parallel BD$ 3p
 NP linie mijlocie în $\triangle ABC \Rightarrow NP \parallel AC$ 4p
Deci $\sphericalangle(MN, NP) = \sphericalangle(BD, AC) \Rightarrow \sphericalangle MNP = 90^\circ$ 4p
- b) PQ linie mijlocie în $\triangle CBD \Rightarrow PQ \parallel BD$ și $PQ = \frac{BD}{2}$ 2p
 MN linie mijlocie în $\triangle ABD \Rightarrow MN \parallel BD$ și $MN = \frac{BD}{2}$ 2p
Deci $MN = PQ$ și $MN \parallel PQ$, de unde avem $MNPQ$ paralelogram 2p
Din $NP = \frac{AC}{2}$; $MN = \frac{BD}{2}$; $AC = BD \Rightarrow MN = NP$, deci $MNPQ$ este romb 2p
Din a) avem $\sphericalangle MNP = 90^\circ$, deci $MNPQ$ pătrat. 2p