

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 7.02.2026 –

Clasa a VI-a

### SUBIECTUL 1 (22,5p)

**11,5p** a) Se consider  $a$  și  $b$  sunt numere naturale nenule, astfel încât  $\frac{2a-b}{2a+b} = \frac{1}{2}$ .

Aflați valoarea raportului  $\frac{2026a-b}{2026a+b}$ .

**11p** b) Se consider  $m$ ,  $n$  și  $p$  numere naturale nenule, astfel încât  $\frac{2m+n+p}{4m+n+3p} = \frac{1}{2}$ .

Aflați valoarea raportului  $\frac{n^2+p^2}{2np}$ .

*Soluție:*

$$a) 4a - 2b = 2a + b, \text{ deci } 2a = 3b$$

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2} = k \text{ și avem } a = 3k, b = 2k$$

$$\frac{2026a - b}{2026a + b} = \frac{6076k}{6080k} = \frac{1519}{1520}$$

3,5p

4p

4p

$$b) 2(2m + n + p) = 4m + n + 3p,$$

$$\text{deci } n = p$$

$$\frac{n^2 + p^2}{2np} = \frac{n^2 + n^2}{2nn} = \frac{2n^2}{2n^2} = 1$$

4p

4p

3p

### SUBIECTUL 2 (22,5p)

În jurul punctului  $O$  se consideră unghiurile  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOE$  și  $EOA$  astfel încât  $OA$  și  $OD$  sunt semidrepte opuse, unghiul  $BOC$  este unghi drept, iar  $4 \cdot \angle DOE = 5 \cdot \angle AOE$ . Știind că bisectoarea  $OF$  a unghiului  $BOC$  formează cu semidreapta  $OA$  un unghi cu măsura de  $80^\circ$ , se cere:

**14,5p** a) Să se determine măsurile unghiurilor  $AOB$ ,  $COD$ ,  $DOE$  și  $EOA$ .

**8p** b) Să se arate că semidreapta  $OA$  este bisectoarea unghiului  $EOF$ .

*Soluție:*

$$a) \angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 180^\circ \Rightarrow \angle AOB + \angle COD = 90^\circ$$

2,5p

$$\angle AOF = 80^\circ \Rightarrow \angle AOB + \angle BOF = 80^\circ \Rightarrow \angle AOB + 45^\circ = 80^\circ \Rightarrow$$

2p

$$\angle AOB = 35^\circ$$

$$\angle COD = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

2p

$$\angle DOE + \angle AOE = 180^\circ$$

2p

$$4 \cdot \angle DOE = 5 \cdot \angle AOE$$

$$4 \cdot \angle DOE + 4 \cdot \angle AOE = 720^\circ$$

2p

$$\begin{aligned}
 9 \cdot \sphericalangle AOE &= 720^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOE = 80^\circ & 2p \\
 \sphericalangle DOE &= 180^\circ - 80^\circ \Rightarrow \sphericalangle DOE = 100^\circ & 2p \\
 \text{b) } \sphericalangle EOF &= \sphericalangle AOF + \sphericalangle AOE = 80^\circ + 80^\circ = 160^\circ & 3p \\
 \sphericalangle AOF &= \sphericalangle AOE = 80^\circ & 3p \\
 &\Rightarrow \text{semidreapta } OA \text{ este bisectoarea unghiului } EOF & 2p
 \end{aligned}$$

### SUBIECTUL 3 (22,5p)

Determinați numerele naturale  $x$  și  $y$  care verifică relația:  $x^4 + 5(x^4y - 2) = 86$

SUPLIMENT GAZETA MATEMATICĂ

Soluție:

$$\begin{aligned}
 x^4 + 5(x^4y - 2) &= 86 \Leftrightarrow x^4 + 5x^4y = 96 & 6p \\
 x^4(1 + 5y) &= 96 & 3,5p \\
 x^4 \text{ și } 1 + 5y &\text{ sunt divizori naturali ai numărului } 96 & 3p \\
 \text{Divizorii de forma } 5k+1 &\text{ ai numărului } 96 \text{ sunt } 1, 6, 16 \text{ și } 96 & 2p \\
 \text{Dacă } 1 + 5y = 1 &\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^4 = 96, \text{ care nu convine} & 2p \\
 \text{Dacă } 1 + 5y = 6 &\Rightarrow y = 1 \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = 2 & 2p \\
 \text{Dacă } 1 + 5y = 16 &\Rightarrow y = 3 \Rightarrow x^4 = 6, \text{ care nu convine} & 2p \\
 \text{Dacă } 1 + 5y = 96 &\Rightarrow y = 19 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = 1 & 2p \\
 \text{Așadar, } (x, y) &\in \{(1, 19), (2, 1)\}
 \end{aligned}$$

### SUBIECTUL 4 (22,5p)

Pe cercul de centru  $O$  și rază  $4\text{cm}$  se consideră punctele  $A, B, C$  și  $D, E$ , în această ordine, astfel încât măsurile arcelor  $AB, BC, CD, DE$  și  $EA$  sunt direct proporționale cu  $4, 3, 5, 2$  și  $10$ .

**15,5p** a) Să se determine lungimea segmentului  $AD$ .

**7p** b) Să se demonstreze că  $OB$  este bisectoarea unghiului  $AOM$ , unde  $M$  este mijlocul arcului  $BD$ .

Soluție:

a)

Notăm măsurile arcelor  $AB, BC, CD, DE$  și  $EA$  cu  $x, y, z, t, u$ . Avem:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{t}{2} = \frac{u}{10} = k, \text{ deci } x = 4k, y = 3k, z = 5k, t = 2k, u = 10k. \quad 4,5p$$

Dar  $x + y + z + t + u = 360^\circ$ , deci  $24k = 360^\circ$  și  $k = 15^\circ$

Măsurile arcelor sunt  $AB=60^\circ, BC=45^\circ, CD=75^\circ, DE=30^\circ, EA=150^\circ$ ;

Măsura arcului  $AD$  este  $180^\circ$ ,

deci segmentul  $AD$  este diamentru și  $AD=2 \cdot 4\text{cm} = 8\text{cm}$

b)

$M$  mijlocul arcului  $BD$  implică  $\widehat{BOM} = \widehat{MOD} = 60^\circ$

dar  $\widehat{AOB} = 60^\circ$

deci  $\widehat{BOM} = \widehat{AOB}$  și cum  $OB$  interioară unghiului  $AOM$ , avem

$OB$  este bisectoarea unghiului  $AOM$

2p

**Notă:**

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

ISJ Prahova