

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-30.01.2026
Clasa a VIII-a
BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

- Se acordă 10 p din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem .

Subiectul 1 (20p)

Fie $x, y \in \mathbb{R}, y \neq \frac{1}{2}$ astfel încât $x(x+3) = 9y(y+1)$. Să se arate că $z = \frac{2x+3}{2y+1} \in \mathbb{Z}$.

Soluție:

Ecuția se rescrie ca $x^2 + 3x = 9y^2 + 9y \Leftrightarrow x^2 - 9y^2 + 3(x - 3y) = 0 \Leftrightarrow$ $(x - 3y)(x + 3y) + 3(x - 3y) = 0 \Leftrightarrow (x - 3y)(x + 3y + 3) = 0$ Obținem $x = 3y$ sau $x = -3y - 3$.	5p 5p 4p
Dacă $x = 3y$, atunci $z = \frac{6y+3}{2y+1} = 3 \in \mathbb{Z}$	
Dacă $x = -3y - 3$, atunci $z = \frac{-6y-3}{2y+1} = -3 \in \mathbb{Z}$.	4p
Din ambele cazuri deducem că $z \in \mathbb{Z}$.	2p

Subiectul 2 (25p)

Se consideră o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu muchia bazei egală cu 8cm și muchia laterală egală cu $4\sqrt{3}\text{cm}$. Considerăm M mijlocul laturii BC și punctul T situat pe latura CD astfel încât suma $VT + TM$ să fie minimă.

(10p) a) Aflați lungimea segmentului CT .

(15p) b) Determinați tangenta unghiului dintre dreptele VT și OM , unde O este centrul bazei.

Soluție:

a)	Considerăm E mijlocul laturii CD și avem $DE=EC=4\text{cm}$, $CM=4\text{cm}$, $VE = 4\sqrt{2}\text{cm}$	5p
	$\Delta VET \sim \Delta MCT \Rightarrow CT = 4(\sqrt{2} - 1)$	5p
b)	$\sphericalangle(VT, OM) = \sphericalangle VTE$	5p
	$ET = 4(2 - \sqrt{2})$	5p
	$\text{tg}(\sphericalangle VTE) = \frac{VE}{ET} = 1 + \sqrt{2}$	5p

Subiectul 3 (25p)

Fie a și b numere reale astfel încât $a^2 + b^2 + 2 \leq 2a + 6b$.

(10p) a) Câte perechi de numere întregi verifică inegalitatea din enunț?

(15p) b) Să se arate că $0 \leq a + b \leq 8$.

Soluție:

a)	Scrierea inegalității din enunț sub forma: $(a - 1)^2 + (b - 3)^2 \leq 8$	4p
	Determinarea numărului de perechi pentru fiecare din cazurile obținute	3p
	Determinarea numărului total de perechi, adică 25	3p
b)	Avem inegalitatea evidentă $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ pentru orice numere reale x și y	5p
	Aplicarea acestei inegalități pentru $x=a-1$ și $y=b-3$	5p
	Obținerea inegalității $ a + b - 4 \leq 4$	3p
	Finalizare, $0 \leq a + b \leq 8, \forall a, b \in \mathbf{R}$	2p

Subiectul 4. (20p)

Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D și punctul M pe segmentul AB , iar planul α un plan care trece prin punctul M și este paralel cu AC și BD și care intersectează dreptele BC, CD și AD în punctele N, P și respectiv Q .

(10p) a) Să se arate că segmentele MP și NQ au același mijloc.

(10p) b) Dacă $AC \perp BD$, iar $AC = BD$, atunci determinați poziția punctului M pe AB astfel încât aria patrulaterului $MNPQ$ să fie maximă.

Soluție:

a)	Realizarea desenului	5p
	$MN \parallel PQ$	2p
	$MQ \parallel NP$	2p
	$MNPQ$ – paralelogram	1p
b)	Din $MNPQ$ – paralelogram și $MN \perp MQ \Rightarrow MNPQ$ – dreptunghi	3p
	$A_{MNPQ} = MN \cdot MQ = \max \Leftrightarrow MN = MQ$	3p
	Din $\frac{AM}{AB} = \frac{MQ}{BD}$ și $\frac{BM}{AB} = \frac{MN}{AC}$ și $BD=AC$ vom obține $AM=BM \Rightarrow M$ - mijlocul lui AB	4p