

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**etapa locală – Maramureș**  
**7 februarie 2026**

**Subiect**  
**Clasa a XII - a**

Toate subiectele sunt obligatorii.  
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Se acordă 10 puncte din oficiu.  
Scrieți rezolvările complete.

**Problema 1.**

**(22,5 puncte)**

Pe  $G = [0, 1)$  definim legea  $x * y = \{x + y\}$ , unde  $\{a\}$  este partea fracționară a numărului real  $a$ .

a) Demonstrați că  $(G, *)$  este grup abelian.

b) Demonstrați că mulțimea  $H = \left\{0, \frac{1}{2026}, \frac{2}{2026}, \dots, \frac{2025}{2026}\right\}$  este subgrup al grupului  $G$ .

c) Rezolvați, în grupul  $G$ , ecuația  $x^2 * x = \frac{1}{2}$ .

**Problema 2.**

**(22,5 puncte)**

Fie  $(G, \cdot)$  un grup cu proprietatea că există  $a \in G$  astfel încât  $a^2 x^5 a^2 = x$ ,  $(\forall) x \in G$ . Arătați că  $x^8 = e$ ,  $(\forall) x \in G$ , unde  $e \in G$  este elementul neutru al grupului  $(G, \cdot)$ .

**Problema 3.**

**(22,5 puncte)**

Arătați că dacă  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o primitivă a unei funcții  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $F(0) = 0$ , atunci există  $c \in \mathbb{R}$  astfel încât  $F(c) = (1 - c)f(c)$ .

**Problema 4.**

**(22,5 puncte)**

a) Determinați derivata funcției  $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{e^x}$ .

b) Calculați primitivele funcției  $g: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{e^x (2 - \sin 2x)}{e^{2x} \cos^2 x + \sin^2 x}$ .