

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
etapa locală – Maramureș
7 februarie 2026

Subiect

Clasa a XII- a – secțiunea H2

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Scrieți rezolvările complete.

Problema 1.

(20 puncte)

Fie $I_n = \int x^n \sin x \, dx, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

a) Calculați I_0 și I_1 .

b) Arătați că $4I_n + n(n-1)I_{n-2} = nx^{n-1} \sin 2x - 2x^n \cos 2x$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Problema 2.

(20 puncte)

Pe mulțimea $G = [-2; +\infty)$ se definește legea de compoziție

$$x \circ y = 3(x+2)(y+2) - 2, \quad x, y \in G.$$

Știind că legea de compoziție \circ este asociativă, determinați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care

$$\int_{-1}^0 \frac{3}{x+2} \cdot \underbrace{(x \circ x \circ \dots \circ x)}_{n \text{ termeni}} dx = \frac{189}{n} - 6 \ln 2.$$

Problema 3.

(20 puncte)

Pe \mathbb{R} se consideră legea de compoziție $x \circ y = x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}, x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că (\mathbb{R}, \circ) este un grup abelian.

b) Demonstrați că $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ este un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}; \circ)$ și $(\mathbb{R}; +)$.

Problema 4. (problema de matematică aplicată)

(30 puncte)

Fiecare din cei 28 de elevi ai unei clase devine elev de serviciu la un moment dat. Luni este E1 (primul elev din catalog), marți este E2 (al doilea elev din catalog) ș.a.m.d.

a) În ce zi a săptămânii este de serviciu prima dată E26?

b) Dacă în 8 ianuarie 2026 a fost de serviciu E13, atunci aflați cine va fi de serviciu în 6 februarie 2026.

c) Elevii clasei stabilesc că din 9 februarie 2026, elevul care se află în catalog pe poziția unui număr inversabil din (\mathbb{Z}_{28}, \cdot) , poate fi de serviciu împreună cu elevul care se află în catalog pe poziția inversului numărului său. În ce dată vor fi prima dată doi elevi de serviciu și cine?