

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
etapa locală – Maramureș
7 februarie 2026
Barem de corectare și notare
Clasa a XII- a – secțiunea H2
Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

Problema 1.

(20 puncte)

Fie $I_n = \int x^n \sin 2x \, dx, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

a) Calculați I_0 și I_1 .

b) Arătați că $4I_n + n(n-1)I_{n-2} = nx^{n-1} \sin 2x - 2x^n \cos 2x$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Soluție:

a) $I_0 = \int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$	5 p
$I_1 = \int x \sin 2x \, dx = \int x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right)' dx =$ $= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$	5 p
b) $I_n = \int x^n \cdot \sin 2x \, dx = \int x^n \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right)' dx = -\frac{1}{2} x^n \cos 2x + \frac{n}{2} \int x^{n-1} \cos 2x \, dx =$ $= -\frac{1}{2} x^n \cos 2x + \frac{n}{2} \int x^{n-1} \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)' dx =$ $= -\frac{1}{2} x^n \cos 2x + \frac{n}{4} x^{n-1} \sin 2x - \frac{n(n-1)}{4} \int x^{n-2} \cdot \sin 2x \, dx$	5 p
Rezultă: $I_n = -\frac{1}{2} x^n \cos 2x + \frac{n}{4} x^{n-1} \sin 2x - \frac{n(n-1)}{4} \cdot I_{n-2}$ Concluzie: $4I_n + n(n-1)I_{n-2} = nx^{n-1} \sin 2x - 2x^n \cos 2x$	5 p

Problema 2.

(20 puncte)

Pe mulțimea $G = [-2; +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă

$$x \circ y = 3(x+2)(y+2) - 2, \quad x, y \in G.$$

Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care

$$\int_{-1}^0 \frac{3}{x+2} \cdot \underbrace{(x \circ x \circ \dots \circ x)}_{n \text{ termeni}} dx = \frac{189}{n} - 6 \ln 2.$$

Soluție:

$x \circ x = 3(x+2)^2 - 2; x \circ x \circ x = 3^2(x+2)^3 - 2; \dots; \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ termeni}} = 3^{n-1}(x+2)^n - 2$	5 p
Demonstrație prin inducție	5 p
$\int_{-1}^0 \frac{3}{x+2} \cdot \underbrace{(x \circ x \circ \dots \circ x)}_{n \text{ termeni}} dx = \int_{-1}^0 \frac{3}{x+2} [3^{n-1}(x+2)^n - 2] dx =$ $3^n \int_{-1}^0 (x+2)^{n-1} dx - 6 \int_{-1}^0 \frac{1}{x+2} dx = 3^n \frac{(x+2)^n}{n} \Big _{-1}^0 - 6 \ln(x+2) \Big _{-1}^0 = \frac{3^n(2^n - 1)}{n} - 6 \ln 2$	7 p
Finalizare $3^n(2^n - 1) = 189 \Rightarrow 6^n - 3^n = 189 \Rightarrow n = 3$	3 p

Problema 3.

(20 puncte)

Pe \mathbb{R} se consideră legea de compoziție $x \circ y = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}, x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $(\mathbb{R}; \circ)$ este un grup abelian.

- b) Demonstrați că $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ este un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}; \circ)$ și $(\mathbb{R}; +)$.

Soluție:

a) Parte stabilă	2 p
Comutativitate	2 p
Asociativitate	2 p
$e = 0$, element neutru	2 p
$x' = -x$, simetricul lui x , rezultă $(\mathbb{R}; \circ)$ este un grup abelian	2 p
b) $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ injectivă	3 p
$Im f = \mathbb{R} \Rightarrow f$ surjectivă	3 p
$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x \circ y) = f(x) + f(y) \Rightarrow f$ morfism	4 p
Concluzie f izomorfism	

Problema 4. (problema de matematică aplicată)

(30 puncte)

Fiecare din cei 28 de elevi ai unei clase devine elev de serviciu la un moment dat. Luni este E1 (primul elev din catalog), marți este E2 (al doilea elev din catalog) ș.a.m.d.

- În ce zi a săptămânii este de serviciu prima dată E26?
- Dacă în 8 ianuarie 2026 a fost de serviciu E13, atunci aflați cine va fi de serviciu în 6 februarie 2026.
- Elevii clasei stabilesc că din 9 februarie 2026, cine se află în catalog pe un număr inversabil din \mathbb{Z}_{28} , poate fi de serviciu împreună cu elevul de pe inversa numărului său. În ce dată vor fi prima dată doi elevi de serviciu și cine?

Soluție:

a) Atribuim zilelor de școală elementele din \mathbb{Z}_5 , astfel Luni= $\hat{1}$, Marți= $\hat{2}$, Miercuri= $\hat{3}$, Joi= $\hat{4}$ și Vineri= $\hat{5} = \hat{0}$. E1 începe serviciul într-o zi de luni= $\hat{1}$,..., E26 va fi de serviciu luni= $\widehat{26} = \hat{1}$	10 p
b) Atribuim fiecărui elev, conform ordinii din catalog, elementele din \mathbb{Z}_{28} astfel: E1 = $\hat{1}$, E2 = $\hat{2}$, ... E28 = $\widehat{28} = \hat{0}$. Din 8 ianuarie 2026 până în 6 februarie 2026 inclusiv sunt 22 de zile de școală. Dacă în 8 ianuarie a fost de serviciu E13, atunci peste 21 de zile elevul de serviciu va fi $E6 = (\widehat{13 + 21}) = \hat{6}$	10 p
c) Elementele inversabile din \mathbb{Z}_{28} sunt: $\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{9}, \hat{11}, \hat{13}, \hat{15}, \hat{17}, \hat{19}, \hat{23}, \hat{25}, \hat{27}$ din b) \Rightarrow în 6 februarie a fost de serviciu E6 primul număr inversabil după $\hat{6}$ este $\hat{9} \Rightarrow E9$ va fi primul elev de serviciu cu perechea E25 $\hat{9}^{-1} = \widehat{25}$, deoarece $\hat{9} \cdot \widehat{25} = \widehat{225} = 1$, ($225 = 28 \cdot 8 + 1$) Vineri 6 februarie este E6, Luni 9 februarie este E7, Marți 10 februarie este E8, Miercuri 11 februarie sunt E9+E25 Concluzie: în data de 11 februarie 2026 vor fi prima dată doi elevi de serviciu, elevii E9 și E25	10 p

Se acordă 10 puncte din oficiu.