

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
etapa locală – Maramureș
7 februarie 2026

Barem de corectare și notare
Clasa a XII - a – Secțiunea H1
Filieră tehnologică, toate profilurile și specializările

Problema 1.

(20 puncte)

Determinați:

a) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x^2} dx, \quad x \in (0, \infty)$

Soluție:

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| a) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx =$ | 5 p |
| $= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$ | 5 p |
| b) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x^2} dx = \int \frac{x\sqrt{x}-3x+3\sqrt{x}-1}{x^2} dx =$ | 5 p |
| $= \int x^{-\frac{1}{2}} dx - 3 \int \frac{1}{x} dx + 3 \int x^{-\frac{3}{2}} dx - \int x^{-2} dx = 2\sqrt{x} - 3 \ln x - 6 \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + C$ | 5 p |

Problema 2.

(20 puncte)

Pe \mathbb{R} definim legea de compoziție $x \circ y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}, \quad x, y \in \mathbb{R}$ și fie $G = (1; \infty)$.

a) Arătați că $(G; \circ)$ este un grup abelian.

b) Determinați numerele reale m și n astfel încât $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow G, f(x) = \sqrt{mx+n}$ să fie un izomorfism între grupurile (\mathbb{R}_+^*, \cdot) și (G, \circ) .

Soluție:

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| a) $x \circ y = \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1}, \quad x, y \in G$ Fie $x, y \in (1, \infty) \Rightarrow x^2 > 1, y^2 > 1 \Rightarrow (x^2-1)(y^2-1) > 0 \Rightarrow (x^2-1)(y^2-1)+1 > 1 \Rightarrow \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1} > 1 \Rightarrow x \circ y \in (1, \infty)$, deci G este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu " \circ ". " \circ " este lege de compoziție pe $G = (1; \infty)$. | 3 p |
| $(x \circ y) \circ z = \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)+1} \quad (1)$ $x \circ (y \circ z) = \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)+1} \quad (2)$ Din (1) și (2) deducem că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in G$, deci legea este asociativă | 2 p |
| $x \circ y = \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1} = \sqrt{(y^2-1)(x^2-1)+1} = y \circ x, \quad \forall x, y \in G$, deci legea este comutativă | 2 p |
| Elementul neutru $\exists e \in G$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in G$ Datorită comutativității este suficient să rezolvăm doar ecuația $x \circ e = x$ cu necunoscuta e $x \circ e = x \Leftrightarrow \sqrt{(x^2-1)(e^2-1)+1} = x \Leftrightarrow (x^2-1)(e^2-1)+1 = x^2 \Leftrightarrow (x^2-1)(e^2-2) = 0, \forall x \in G$, de unde $e = \sqrt{2} \in G$ | 3 p |
| Trebuie demonstrat că orice element din G este simetrizabil $x \in G$ este simetrizabil dacă $\exists x' \in G$ astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = e$ Datorită comutativității este suficient să rezolvăm doar ecuația $x' \circ x = e$, cu necunoscuta x' | 3 p |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| $\sqrt{(x^2 - 1)(x'^2 - 1) + 1} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x'^2(x^2 - 1) = x^2 \mid : (x^2 - 1) \neq 0, \forall x \in G \Leftrightarrow \exists x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \forall x \in G$ Verificăm dacă $x' \in G \Leftrightarrow x' > 1 \Leftrightarrow x > \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow x^2 > x^2 - 1 \Leftrightarrow 0 > -1$, adevărat pentru orice $x \in G$ Deci, orice element din G este simetrizabil $\Rightarrow (G, \circ)$ grup abelian | |
| b) f izomorfism de grupuri dacă f morfism și f bijectivă f morfism de grupuri $\Leftrightarrow f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in (0, \infty)$ $\sqrt{mxy + n} = \sqrt{m^2xy + (mn - m)x + (mn - m)y + n^2 - 2n + 2}, \forall x, y \in (0, \infty) \Leftrightarrow$ $m^2 = m, mn - m = 0, n^2 - 2n + 2 = n$ Din $m^2 = m$ avem $m = 0$ sau $m = 1$ Pentru $m = 0$ obținem funcție constantă care nu e bijectivă Pentru $m = 1$ obținem $n = 1$, deci $f(x) = \sqrt{x + 1}$ | 3 p |
| Injectivitatea | 2 p |
| Surjectivitatea | 2 p |

Problema 3.

(20 puncte)

Fie $M = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ b & 2a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, 4a^2 - 3b^2 = 1 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătați că:

- (M, \cdot) este grup abelian
- M are cel puțin 2026! elemente.

Soluție:

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| a) Fie $A, B \in M \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ b & 2a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, 4a^2 - 3b^2 = 1 = \det A$ și $B = \begin{pmatrix} 2c & 3d \\ d & 2c \end{pmatrix}, c, d \in \mathbb{R}, 4c^2 - 3d^2 = 1 = \det B$ $AB = \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ b & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2c & 3d \\ d & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(2ac + \frac{3}{2}bd) & 3(2ad + 2bc) \\ 2ad + 2bc & 2(2ac + \frac{3}{2}bd) \end{pmatrix}$, are forma matricelor din M , unde $2ac + \frac{3}{2}bd \in \mathbb{R}, 2ad + 2bc \in \mathbb{R}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $\det AB = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1$, deci $AB \in M \Rightarrow M$ parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea, deci înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe M | 5 p |
| Asociativitatea | 2 p |
| Comutativitatea | 2 p |
| Pentru $a = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}, b = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot 0 = 1$, deci $I_2 \in M$ și $I_2 \cdot A = A \cdot I_2 = A, \forall A \in M$, deci I_2 este elementul neutru | 3 p |
| $\forall A \in M, \det A = 1 \neq 0 \Rightarrow A$ inversabilă, inversa este $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2a & -3b \\ -b & 2a \end{pmatrix}$, are forma matricelor din M , $a, -b \in \mathbb{R}, \det A^{-1} = 4a^2 - 3(-b)^2 = 4a^2 - 3b^2 = 1$, deci $A^{-1} \in M$, prin urmare orice matrice din M este inversabilă în $M \Rightarrow (M, \cdot)$ grup abelian | 3 p |
| b) Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M$. Din partea stabilă deducem că $A, A^2, A^3, \dots, A^n, \dots \in M, n \in \mathbb{N}^*$. Matricele $A^i \neq A^j, \forall i \neq j$, deoarece, în caz contrar, dacă ar exista $i, j \in \mathbb{N}, i > j$ astfel încât $A^i = A^j \Rightarrow A^{i-j} = I_2$, fals, deci mulțimea $\{A, A^2, A^3, \dots, A^n, \dots\}$ este infinită și cum $\{A, A^2, A^3, \dots, A^n, \dots\} \subset M$, deducem că M este infinită, deci conține cel puțin 2026! elemente. | 5 p |

Problema 4. (problema de matematică aplicată)

(30 puncte)

Profitul total obținut de o firmă prin fabricarea a x frigidere într-o anumită lună este dat de funcția

$p: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Știind că derivata funcției profit este $p'(x) = 600 - 6x$ și că $p(0) = 0$, determinați:

- Funcția profit p .
- Profitul maxim și numărul de frigidere fabricate într-o lună pentru care profitul este maxim.
- Numărul minim $x \neq 0$ de frigidere pentru care nu se mai încasează profit.

Soluție:

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <p>a) Funcția profit este primitiva funcției p' care se anulează în 0</p> $\int p'(x)dx = \int (600 - 6x)dx = 600x - 3x^2 + C$ $p(x) = 600x - 3x^2 + k, \text{ din } p(0) = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \text{funcția profit este } p(x) = 600x - 3x^2$ | 10 p |
| <p>b) Pentru a afla profitul maxim trebuie să aflăm maximum funcției profit și punctul de maxim</p> <p>Funcția p este derivabilă cu derivata $p'(x) = 600 - 6x$ continuă</p> <p>Din $p'(x) = 0 \Rightarrow x = 100$</p> <p>Deoarece $p'(x) \geq 0, \forall x \in [0, 100]$ și $p'(x) \leq 0, \forall x \in [100, \infty)$ deducem că funcția p este strict crescătoare pe intervalul $[0, 100]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[100, \infty)$.</p> <p>Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = -\infty, p(0) = 0$, deducem că $x = 100$ este punctul de maxim, iar $p(100) = 30000$ este valoarea maximă a funcției.</p> <p>Deci, profitul maxim este 30000 care se obține prin fabricarea a 100 de frigidere.</p> | 15 p |
| <p>c) Nu se mai încasează profit dacă $p(x) = 0 \Leftrightarrow 600x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = 200$</p> <p>Cum $x \neq 0$ deducem că $x = 200$</p> | 5 p |

Se acordă 10 puncte din oficiu.